Table des matières

Chapitre 7

Suites et séries

7.1 Convergence des suites

7.1.1 Monotonie (suites à termes réels)

Théorème 7.1.1 *Soit (x_n) une suite croissante de nombres réels. Alors la suite est convergente si et seulement si elle est majorée. Dans ce cas on a $\lim x_n = \sup x_n$.*

Démonstration On sait déjà que toute suite convergente est bornée, donc majorée. Inversement, si la suite est majorée, soit $l = \sup x_n$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe n_0 tel que $l - \varepsilon < x_{n_0} \leq l$. Pour $n \geq n_0$, on a $l - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l$ ce qui montre que la suite converge vers l.

Remarque 7.1.1 On a un résultat analogue avec les suites décroissantes et minorées.

Corollaire 7.1.2 *Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels vérifiant*
- *(i)* (a_n) *est croissante et* (b_n) *décroissante*
- *(ii)* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$
- *(iii)* $\lim(b_n - a_n) = 0$

Alors les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite ℓ qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq \ell \leq b_n$$

On dit que deux telles suites sont adjacentes.

Démonstration On remarque que $\forall p, q,\ a_p \leq b_q$; en effet si $p \leq q$ on a $a_p \leq a_q \leq b_q$ et si $p > q$, on a $a_p \leq b_p \leq a_q$. La suite (a_n) est croissante majorée par b_0, donc converge. De même la suite (b_n) converge et la propriété (iii) implique qu'elles ont la même limite.

Exemple 7.1.1 Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) - \log n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \int_n^{n+1} (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t})\ dt \leq 0$. Posons $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \log n$.

On a de même $v_{n+1} - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{t})\ dt \geq 0$. On a donc (u_n) décroissante, (v_n) croissante, $v_n \leq u_n$, $\lim(v_n - u_n) = 0$. Donc les suites convergent. Soit γ leur limite commune (la constante d'Euler). On a donc $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \log n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$.

7.1.2 Critère de Cauchy

Dans un espace métrique complet, une suite converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy. Cela peut servir aussi bien comme critère de convergence (exemple des suites $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est contractante) que comme critère de divergence.

Exemple 7.1.2 Posons $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$. On a $x_{2n}-x_n = \dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n} \geq n\times\dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$. La suite ne vérifie donc pas le critère de Cauchy (bien que $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$), donc elle ne converge pas.

7.1.3 Valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures

Proposition 7.1.3 *Soit E un espace métrique et (x_n) une suite de E. L'ensemble de ses valeurs d'adhérences est fermé dans E.*

Démonstration On a vu dans le chapitre sur les compacts que l'ensemble X des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) est $\displaystyle\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{X_N}$ avec $X_N = \{x_n \mid n \geq N\}$. Comme intersection de fermés, c'est un fermé. On peut aussi le redémontrer directement. Soit $x \in \overline{X}$ et $V \in V(x)$. Soit U ouvert tel que $x \in U \subset V$. On a $U \cap X \neq \emptyset$. Soit $y \in U \cap X$. Comme U est ouvert, U est un voisinage de la valeur d'adhérence y et donc $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$ est infini ; il en est de même a fortiori de $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$, donc x est encore valeur d'adhérence de la suite.

Théorème 7.1.4 *Soit E un espace métrique compact et (x_n) une suite de E.*
- *(i) La suite a au moins une valeur d'adhérence*
- *(ii) La suite converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.*

Démonstration L'affirmation (i) n'est autre que la définition d'un compact.

(ii) La condition est évidemment nécessaire. Supposons la remplie et soit ℓ cette unique valeur d'adhérence. Supposons que ℓ n'est pas limite de la suite. Ceci signifie qu'il existe U ouvert contenant ℓ tel que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$ tel que $x_n \notin U$. On construit ainsi facilement une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\forall n$, $x_{\varphi(n)} \in E \setminus U$ (prendre $\varphi(n)$ le plus petit entier supérieur à $N = \varphi(n-1)+1$ vérifiant la condition). Comme $E \setminus U$ est fermé dans un compact, c'est un compact et la suite $(x_{\varphi(n)})$ doit avoir une valeur d'adhérence $\ell' \in E \setminus U$. Mais alors la suite (x_n) a deux valeurs d'adhérences $\ell \neq \ell'$. C'est absurde.

Soit donc (x_n) une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit X l'ensemble de ses valeurs d'adhérences. C'est un fermé non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, donc il contient sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Définition 7.1.1 *Soit* (x_n) *une suite de* $\overline{\mathbb{R}}$. *Soit* X *l'ensemble de ses valeurs d'adhérences. On pose* $\limsup x_n = \max X$ *et* $\liminf x_n = \min X$. *La suite converge (dans* $\overline{\mathbb{R}}$*) si et seulement si* $\limsup x_n = \liminf x_n$.

Théorème 7.1.5 *Soit* (x_n) *une suite de* $\overline{\mathbb{R}}$ *et* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *On a équivalence de*

- *(i)* $\ell = \limsup x_n$
- *(ii)* ℓ *est valeur d'adhérence de la suite et* $\forall c > \ell$, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq c\}$ *est fini.*
- *(iii)* $\ell = \lim\limits_{p\to+\infty} (\sup\limits_{n\geq p} x_n)$

Démonstration ((i)⇒(ii)) Soit $\ell = \limsup x_n$. Alors ℓ est valeur d'adhérence de la suite. Si $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq c\}$ est infini, on peut construire une sous suite dans $[c, +\infty]$ qui est compact ; cette suite doit admettre une valeur d'adhérence $\ell' \in [c, +\infty]$. On a donc $\ell' \in X$ avec $\ell' > \sup X$. C'est absurde.

((ii)⇒(iii)) Remarquons que la suite $y_p = \sup\limits_{n\geq p} x_n$ est décroissante, donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit ℓ' sa limite. Soit $c > \ell$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n < c$. Donc pour $n \geq N$, on a $y_n \leq c$ et donc $\ell' \leq c$. Comme c est quelconque ($> \ell$), on a $\ell' \leq \ell$. Mais d'autre part on sait que ℓ est valeur d'adhérence de la suite (x_n) d'où $\ell = \lim x_{\varphi(n)} \leq \lim y_{\varphi(n)} = \ell'$. Donc $\ell = \ell'$.

((iii)⇒(i)) Posons toujours $y_p = \sup\limits_{n\geq p} x_n$. Si ℓ' est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), on a $\ell' = \lim x_{\varphi(n)} \leq \lim y_{\varphi(n)} = \ell$, donc $\limsup x_n \leq \ell$. Mais d'autre part, soit U un ouvert contenant ℓ, on peut trouver un N tel que $p \geq N \Rightarrow y_p \in U$. Pour un tel p, comme $U \in V(y_p)$, on peut trouver un $n \geq p$ tel que $x_n \in U$. Ceci montre que ℓ est valeur d'adhérence de la suite (x_n) soit $\ell \leq \limsup x_n$ et donc l'égalité.

Proposition 7.1.6

- *(i)* $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$ *(avec égalité si l'une des suites est convergente)*
- *(ii) si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites positives,* $\limsup(u_n v_n) \leq \limsup u_n \limsup v_n$ *(avec égalité si l'une des suites est convergente)*
- *(iii) si* $\lambda > 0$, $\limsup(\lambda x_n) = \lambda \limsup x_n$
- *(iv) si* f *est continue,* $f(\limsup x_n) \leq \limsup f(x_n)$ *(avec égalité si* f *est croissante)*

Démonstration (i) On pose $\ell = \limsup u_n$, $v = \limsup v_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n < \ell + \varepsilon$. De même, il existe N' tel que $n \geq N' \Rightarrow v_n < \ell' + \varepsilon$. Alors $n \geq \max(N, N') \Rightarrow u_n + v_n < \ell + \ell' + 2\varepsilon$, ce qui montre que $\limsup(u_n + v_n) \leq \ell + \ell'$. Si la suite u_n converge, on a par exemple $\ell' = \lim v_{\varphi(n)}$, d'où $\ell + \ell' = \lim(u_{\varphi(n)} + v_{\varphi(n)})$ est encore valeur d'adhérence de la suite $(u_n + v_n)$; donc $\limsup(u_n + v_n) = \ell + \ell'$. La démonstration de (ii) est tout à fait similaire.

(iii) est tout à fait élémentaire.

(iv) soit $\ell = \limsup x_n$. On a $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$, donc $f(\ell) = \lim f(x_{\varphi(n)})$ est valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))$. On en déduit que $f(\ell) \leq \limsup f(x_n)$. Supposons maintenant f croissante et supposons que $f(\ell) < \limsup f(x_n) = \ell'$. Soit α tel que $f(\ell) < \alpha < \ell'$. Le réel ℓ' est valeur d'adhérence de la suite $f(x_n)$, donc on peut trouver N tel que $f(x_N) > \alpha (> f(\ell))$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe a

tel que $\alpha = f(a)$. Comme f est croissante, on a $a > \ell$. On a $\ell = \lim f(x_{\varphi(n)})$ donc il existe N' tel que $n \geq N' \Rightarrow f(x_{\varphi(n)}) > \alpha = f(a)$. Mais alors $n \geq N' \Rightarrow x_{\varphi(n)} > a > \ell$. Ceci contredit le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de n tels que $x_n > a$. On a donc $f(\ell) = \ell'$.

Remarque 7.1.2 L'exemple $u_n = (-1)^n$, $v_n = -u_n$ montre que l'on n'a pas généralement d'égalité dans (i). En ce qui concerne (iii), si $\lambda < 0$ on a évidemment $\limsup(\lambda x_n) = \lambda \liminf x_n$. De même pour (iv), si f est décroissante, on a $f(\limsup x_n) = \liminf f(x_n)$, ce qui montre qu'en général on n'a pas d'égalité dans (iv).

Les résultats concernant la limite inférieure sont tout à fait similaires, les inégalités changeant de sens

Exemple 7.1.3 Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ continue croissante ; on suppose que l'équation $f(x) = \dfrac{x}{2}$ a une unique solution ℓ, que $x < \ell \Rightarrow f(x) > \dfrac{x}{2}$ et $x > \ell \Rightarrow f(x) < \dfrac{x}{2}$; on considère la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n) + f(x_{n-1})$. On vérifie facilement que si $a = \min(\ell, x_0, x_1)$, $b = \max(\ell, x_0, x_1)$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [a, b]$. Posons $M = \limsup x_n$ et $m = \liminf x_n$. On a alors $M = \limsup(f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})) \leq \limsup f(x_{n-1}) + \limsup f(x_{n-2}) = 2f(M)$. On en déduit que $M \leq \ell$. On montre de même que $m \geq \ell$ d'où $m = M = \ell$ et la suite converge.

7.1.4 Récurrences d'ordre 1

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère $x_0 \in D$ et la suite (x_n) définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$. On note $D' = \{x_0 \in D \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est définie }\}$ (on montre facilement que $D' = \displaystyle\bigcup_{A \subset D, f(A) \subset A} A$). On remarque immédiatement que D contient tous les points fixes de f.

Proposition 7.1.7 *Si la suite (x_n) converge vers un point $\ell \in D$, alors $f(\ell) = \ell$.*

Démonstration On a alors $\ell = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\ell)$ par continuité de f au point ℓ.

Proposition 7.1.8 *Soit $\ell \in D^o$ tel que $f(\ell) = \ell$ et supposons f dérivable au point ℓ.*
- *(i) Si $|f'(\ell)| < 1$ (point fixe attractif), il existe un $\eta > 0$ tel que*
  - *(a) $f(]\ell-\eta, \ell+\eta[) \subset]\ell-\eta, \ell+\eta[\subset D'$*
  - *(b) $(\exists n_0 \in \mathbb{N},\ x_{n_0} \in]\ell-\eta, \ell+\eta[) \Rightarrow \lim x_n = \ell$*
- *(ii) Si $|f'(\ell)| > 1$ (point fixe répulsif) et si $\lim x_n = \ell$, alors la suite est stationnaire en ℓ.*

Démonstration (i) Soit k tel que $|f'(\ell)| < k < 1$. Comme

$$\lim_{x\to\ell, x\neq\ell} \left| \frac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell} \right| = \lim_{x\to\ell, x\neq\ell} \left| \frac{f(x) - \ell}{x - \ell} \right| = |f'(\ell)| < k$$

il existe $\eta > 0$ tel que $|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq k|x - \ell|$. On a alors évidemment $f(]\ell-\eta, \ell+\eta[) \subset]\ell-\eta, \ell+\eta[\subset D'$. Soit n_0 tel que $x_{n_0} \in]\ell-\eta, \ell+\eta[$. Alors pour tout

$n \geq n_0$ on a $x_n \in]\ell - \eta, \ell + \eta[$ et $|x_{n+1} - \ell| \leq k|x_n - \ell|$. On a alors $|x_n - \ell| \leq k^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell|$ ce qui montre que $\lim x_n = \ell$.

(ii) Une méthode similaire montre que si $|f'(\ell)| > k > 1$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \geq k|x - \ell|$. Si $\lim x_n = \ell$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \ell| < \eta$. On a alors $|x_{n+1} - \ell| \geq k|x_n - \ell|$, soit encore $|x_n - \ell| \geq k^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell|$ avec $k > 1$. Ce n'est compatible avec le fait que $x_n - \ell$ tend vers 0 que si $x_{n_0} - \ell = 0$, et la suite est alors stationnaire.

Les deux propositions précédentes permettent de conclure dans un certain nombre de cas. Une étude plus fine relève en général de propriétés de monotonie de la fonction f.

Proposition 7.1.9 *Soit I un intervalle stable par f sur lequel f est monotone. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in I$. Alors $\forall n \geq n_0,\ x_n \in I$ et de plus*

- *(i) si f est croissante sur I, la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est monotone (le sens étant déterminé par le signe de $x_{n_0+1} - x_{n_0} = f(x_{n_0}) - x_{n_0}$)*
- *(ii) si f est décroissante sur I, les deux sous suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire à partir de l'indice n_0.*

Démonstration Supposons f croissante et par exemple $f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$, alors $x_n \leq x_{n-1} \Rightarrow f(x_n) \leq f(x_{n-1}) \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$ ce qui montre par récurrence que $\forall n \geq n_0,\ x_{n+1} \leq x_n$ et la suite est décroissante à partir de n_0. De même, si $f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} \geq x_{n_0}$, la suite est croissante à partir de n_0. Supposons maintenant f décroissante sur I et $f(I) \subset I$. Alors $f \circ f$ est croissante sur I et donc les deux sous suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones, car elles vérifient la relation $y_{n+1} = f \circ f(y_n)$. De plus elles sont de sens contraire car $x_{2n+3} - x_{2n+1} = f(x_{2n+2}) - f(x_{2n})$ et f est décroissante.

Remarque 7.1.3 Supposons que l'on est dans la situation de la proposition avec f croissante ; soit $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$. On constate immédiatement que le signe de $\ell - x_n = f(\ell) - f(x_{n-1})$ est constant, si bien que ℓ fournit soit un majorant, soit un minorant de la suite.

7.2 Généralités sur les séries

7.2.1 Notion de série

Définition 7.2.1 *Soit E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de E. On appelle sommes partielles de la série $\sum x_n$ les $S_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$ (notée $S_n(x)$ s'il y a risque de confusion). On dit que la série converge si la suite des sommes partielles converge dans E ; sa limite est alors appelée la somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{n} x_p$. Une série non convergente est dite divergente.*

Remarque 7.2.1 Soit (a_n) une suite de E. Définissons une suite (x_n) par $x_0 = a_0$ et pour $n \geq 1$, $x_n = a_n - a_{n-1}$. On a immédiatement $S_n(x) = a_n$ et donc la série $\sum x_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge ; dans ce cas on a d'ailleurs $\lim a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Ceci peut permettre dans certains cas de ramener une étude de convergence de suite à une étude de convergence de série.

Proposition 7.2.1 *Soit E un espace vectoriel normé, $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries d'éléments de E. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n = y_n$ (autrement dit les deux suites ne diffèrent que par un nombre fini de termes). Alors les deux séries sont de même nature (simultanément convergentes ou divergentes).*

Démonstration Pour $n \geq N$, on a $S_n(x) = S_n(y) + (S_N(x) - S_N(y))$ donc l'une des suites S_n converge si et seulement si l'autre converge.

Remarque 7.2.2 En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S(x) = S(y) + (S_N(x) - S_N(y))$.

Définition 7.2.2 *Soit E un espace vectoriel normé, $\sum x_n$ une série convergente et $p \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum_{n \geq p+1} x_n$ est convergente ; sa somme est notée R_p (ou $R_p(x)$). On a par définition $S_n + R_n = \sum_{p=0}^{+\infty} x_p$ et $\lim R_n = 0$.*

Proposition 7.2.2 *Soit E un espace vectoriel normé. Alors l'ensemble des suites (x_n) telles que la série $\sum x_n$ convergent est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$. L'application $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est linéaire de ce sous-espace vectoriel dans E.*

Démonstration Il suffit de remarquer que si α et β sont des scalaires, $S_n(\alpha x + \beta y) = \alpha S_n(x) + \beta S_n(y)$.

7.2.2 Terme général, critère de Cauchy

Théorème 7.2.3 *Si la série $\sum x_n$ converge, alors la suite (x_n) admet 0 pour limite.*

Démonstration $x_n = S_n - S_{n-1}$ et les deux suites ont la même limite $S = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Théorème 7.2.4 *(critère de Cauchy pour les séries). Soit E un espace vectoriel normé complet et $\sum x_n$ une série à termes de E. La série $\sum x_n$ converge si et seulement si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ q \geq p \geq N \Rightarrow \| \sum_{n=p}^{q} x_n \| < \varepsilon$$

Démonstration C'est simplement le critère de Cauchy pour la suite (S_n) des sommes partielles puisque $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} x_n = S_q - S_{p-1}$.

Exemple 7.2.1 La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge puisque $\displaystyle\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. La série ne vérifie donc pas le critère de Cauchy (bien que $\lim \frac{1}{n} = 0$), donc elle diverge.

7.3 Séries à termes réels positifs

7.3.1 Convergence des séries à termes réels positifs

Théorème 7.3.1 *Soit $\sum x_n$ une série à termes réels positifs. Alors la suite des sommes partielles est une suite croissante ; la série converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq M$.*

Démonstration On a $S_n - S_{n-1} = x_n \geq 0$ donc la suite (S_n) est croissante ; par suite, elle converge si et seulement si elle est majorée.

Remarque 7.3.1 Si une série à termes positifs diverge, on a donc nécessairement $\lim S_n = +\infty$ (puisque la suite (S_n) est croissante).

Corollaire 7.3.2 *Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels telles que $0 \leq x_n \leq y_n$. Alors*
- *(i) si la série $\sum y_n$ converge, la série $\sum x_n$ converge également*
- *(ii) si la série $\sum x_n$ diverge, la série $\sum y_n$ diverge*

Démonstration On a $S_n(x) \leq S_n(y)$ donc tout majorant de la suite $(S_n(y))$ est aussi un majorant de la suite $(S_n(x))$, d'où (i). L'énoncé (ii) n'en est que la contraposée.

Remarque 7.3.2 Pour que l'énoncé précédent soit valable, il suffit évidemment qu'il existe $k > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n \leq k y_n$, c'est-à-dire que $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ et $x_n = O(y_n)$.

7.3.2 Comparaison des séries à termes réels positifs

Théorème 7.3.3 *Soit* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *deux séries à termes réels positifs telles que* $x_n = O(y_n)$ *(resp.* $x_n = o(y_n)$*). Alors*

- *(i) si la série* $\sum y_n$ *converge, la série* $\sum x_n$ *converge également et* $R_n(x) = O(R_n(y))$ *(resp.* $R_n(x) = o(R_n(y))$*)*
- *(ii) si la série* $\sum x_n$ *diverge, la série* $\sum y_n$ *diverge et* $S_n(x) = O(S_n(y))$ *(resp.* $S_n(x) = o(S_n(y))$*)*

Démonstration Les convergences et divergences résultent immédiatement de la remarque qui suit le corollaire précédent et du fait que $x_n = o(y_n) \Rightarrow x_n = O(y_n)$. Montrons par exemple les énoncés sur les relations de comparaison dans le cas $x_n = o(y_n)$ (des modifications évidentes de ε en k ou $2k$ permettent de traiter le cas $x_n = O(y_n)$).

(i) Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n \leq \varepsilon y_n$. Alors pour $n \geq N$, on a $0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} x_p \leq \varepsilon \sum_{p=n+1}^{+\infty} y_p$, soit $0 \leq R_n(x) \leq \varepsilon R_n(y)$. On a donc $R_n(x) = o(R_n(y))$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n \leq \frac{\varepsilon}{2} y_n$. Alors pour $n > N$, on a $0 \leq \sum_{p=N+1}^{n} x_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=N+1}^{n} y_p$, soit $S_n(x) - S_N(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}(S_n(y) - S_N(y))$ ou encore $0 \leq S_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) + (S_N(x) - \frac{\varepsilon}{2} S_N(y))$. Mais comme la série $\sum y_n$ est à termes positifs divergente, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ et donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N' \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) \geq S_N(x) - \frac{\varepsilon}{2} S_N(y)$. Alors pour $n > \max(N, N')$, on a $0 \leq S_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) + \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) = \varepsilon S_n(y)$ et donc $S_n(x) = o(S_n(y))$.

Corollaire 7.3.4 *Soit* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *deux séries à termes réels strictement positifs telles que*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Alors $x_n = O(y_n)$ *et en particulier*

- *(i) si la série* $\sum y_n$ *converge, la série* $\sum x_n$ *converge*
- *(ii) si la série* $\sum x_n$ *diverge, la série* $\sum y_n$ *diverge*

Démonstration On vérifie immédiatement par récurrence que pour $n \geq N$ on a $x_n \leq \frac{x_N}{y_N} y_n$ et donc $x_n = O(y_n)$.

Théorème 7.3.5 *Soit* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *deux séries à termes réels telles que* $y_n \geq 0$ *et* $x_n \sim y_n$*. Alors les deux séries sont de même nature et*

- *(i) si la série* $\sum y_n$ *converge, la série* $\sum x_n$ *converge également et* $R_n(x) \sim R_n(y)$
- *(ii) si la série* $\sum y_n$ *diverge, la série* $\sum x_n$ *diverge et* $S_n(x) \sim S_n(y)$

Démonstration Soit $\varepsilon < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon)y_n \leq x_n \leq (1+\varepsilon)y_n$ et donc $x_n \geq 0$ pour $n \geq N$. On a à la fois $x_n = O(y_n)$ et $y_n = O(x_n)$ ce qui d'après le théorème précédent montre que les deux séries convergent ou divergent simultanément. Supposons alors les séries convergentes. On a $|x_n - y_n| = o(y_n)$, on en déduit donc la convergence de $\sum |x_n - y_n|$ et que $R_n(|x-y|) = o(R_n(y))$. Mais $|R_n(x) - R_n(y)| \leq R_n(|x-y|)$ donc $|R_n(x) - R_n(y)| = o(R_n(y))$ et donc $R_n(x) \sim R_n(y)$. Supposons maintenant les séries divergentes. Alors, soit la série $\sum |x_n - y_n|$ converge et comme $\lim S_n(y) = +\infty$ on a $S_n(|x-y|) = o(S_n(y))$, soit elle diverge et le théorème précédent assure que $S_n(|x-y|) = o(S_n(y))$. Mais alors $|S_n(x) - S_n(y)| \leq S_n(|x-y|) = o(S_n(y))$, soit $S_n(x) \sim S_n(y)$.

7.3.3 Séries de Riemann et de Bertrand

Théorème 7.3.6 *(séries de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Si $\alpha > 1$, on a $R_n \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$; si $\alpha < 1$, on a $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$; si $\alpha = 1$, $S_n \sim \log n$.

Démonstration Soit $\alpha \neq 1$. Posons $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $y_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$. On a

$$\frac{y_n}{x_n} = -\frac{(1+\frac{1}{n})^{1-\alpha} - 1}{\frac{1}{n}}$$

qui admet pour limite l'opposé de la dérivée en 0 de $x \mapsto (1+x)^{1-\alpha}$ soit $\alpha - 1$. On a donc $x_n \sim \frac{1}{\alpha-1} y_n > 0$. Les deux séries sont donc de même nature. Or $S_n(y) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ admet une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. Si $\alpha > 1$, on a $R_n(x) \sim \frac{1}{\alpha-1} R_n(y) = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Si $\alpha < 1$, on a $S_n(x) \sim \frac{1}{\alpha-1} S_n(y) = \frac{1}{1-\alpha}((n+1)^{1-\alpha} - 1) \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Enfin, si $\alpha = 1$, on aboutit à une étude similaire avec $y_n = \log(n+1) - \log n = \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

Corollaire 7.3.7 *(séries de Bertrand). Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$.*

Démonstration Soit $x_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$. Si $\alpha > 1$, soit γ tel que $\alpha > \gamma > 1$ et $y_n = \frac{1}{n^\gamma}$. La série $\sum y_n$ converge et $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\log n)^\beta}$ tend vers 0 car $\alpha - \gamma > 0$. On a donc $x_n = o(y_n)$ et la série $\sum x_n$ converge. Si $\alpha < 1$, soit γ tel que $\alpha < \gamma < 1$ et $y_n = \frac{1}{n^\gamma}$. La série $\sum y_n$ diverge et $\dfrac{y_n}{x_n} = \dfrac{(\log n)^\beta}{n^{\gamma-\alpha}}$ tend vers 0 car $\gamma - \alpha > 0$. On a donc $y_n = o(x_n)$ et la série $\sum x_n$ converge. Le cas $\alpha = 1$ résulte facilement du paragraphe suivant.

7.3.4 Comparaison à des intégrales

Théorème 7.3.8 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante, positive. Posons $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt - f(n)$. Alors la série $\sum w_n$ est convergente.*

Démonstration On a $w_n = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\, dt$. Comme f est décroissante, $\forall t \in [n-1, n],\ f(t) \geq f(n)$ et donc $w_n \geq 0$. Mais d'autre part

$$0 \leq w_n \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)\, dt - f(n) = f(n-1) - f(n)$$

On a $\sum_{p=1}^{n} (f(p-1) - f(p)) = f(0) - f(n)$ qui admet une limite quand p tend vers $+\infty$ (car f admet une limite en $+\infty$: elle est décroissante et positive). Ceci montre que la série $\sum (f(p-1) - f(p))$ converge. Il en est donc de même de la série $\sum w_n$.

Corollaire 7.3.9 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue décroissante positive. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.*

Démonstration En effet, on déduit du théorème précédent que les deux séries $\sum f(n)$ et $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$ convergent ou divergent simultanément, car leur différence est une série convergente. Mais on a $\sum_{p=1}^{n} \int_{p-1}^{p} f(t)\, dt = \int_0^n f(t)\, dt = \int_{[0,n]} f$. Si f est intégrable, comme la suite $([0, n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de segments dont la réunion est $[0, +\infty[$, la suite $(\int_{[0,n]} f)$ est convergente de limite $\int_{[0,+\infty[} f$, donc la série $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$ converge et il en est de même de $\sum f(n)$. Si $\sum f(n)$ converge, il en est de même de $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$, et si $[a, b]$ est un segment contenu dans $[0, +\infty[$ les majorations

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_0^{[b]+1} f = \sum_{p=0}^{[b]+1} \int_{p-1}^{p} f(t)\, dt \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p-1}^{p} f(t)\, dt$$

et le fait que f soit positive, montrent que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Remarque 7.3.3 Bien entendu, il suffit que la condition de décroissance soit vérifiée sur un certain $[t_0, +\infty[$.

Dans le cas d'une série divergente, l'encadrement

$$\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{p=0}^{n} f(p) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,dt$$

permet souvent d'obtenir un équivalent de la somme partielle de la série. Dans le cas d'une série convergente, on a de même

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} f(p) \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

ce qui permet souvent d'obtenir une majoration ou un équivalent du reste de la série.

Exemple 7.3.1 Dans le cas limite des séries de Bertrand, $\sum \frac{1}{n(\log n)^\beta}$, la fonction $f(t) = \frac{1}{t(\log t)^\beta}$ est continue décroissante (pour t assez grand) de limite 0. Donc la série est de même nature que l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^\beta}$. Mais on a $\int_3^x \frac{dt}{t(\log t)^\beta} = \int_{\log 3}^{\log x} \frac{du}{u^\beta}$ (poser $u = \log t$) qui admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$. Ceci achève la démonstration du critère de convergence des séries de Bertrand.

7.4 Séries absolument convergentes

7.4.1 Notion de convergence absolue

Définition 7.4.1 *Soit E un espace vectoriel normé. On dit que la série $\sum x_n$ est absolument convergente si la série à termes réels positifs $\sum \|x_n\|$ converge.*

Théorème 7.4.1 *Soit E un espace vectoriel normé complet. Alors toute série absolument convergente à terme général dans E est convergente.*

Démonstration On a $\|\sum_{n=p}^{q} x_n\| \leq \sum_{n=p}^{q} \|x_n\|$. Si la série $\sum \|x_n\|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy, il en est donc de même de la série $\sum x_n$ et donc celle-ci converge.

Remarque 7.4.1 L'avantage est bien entendu de ramener l'étude à celle d'une série à termes réels positifs.

7.4.2 Critères de convergence absolue

Théorème 7.4.2 *Soit* $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *deux séries telles que* $x_n = O(y_n)$ *et* $\sum y_n$ *est absolument convergente. Alors* $\sum x_n$ *converge absolument.*

Démonstration On a $x_n = O(y_n) \iff \|x_n\| = O(\|y_n\|)$ et il suffit d'appliquer le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

Remarque 7.4.2 Le théorème ci-dessus reste valable même si les termes généraux x_n et y_n ne sont pas dans le même espace vectoriel normé. En particulier, la série étalon $\sum y_n$ sera le plus souvent une série à termes réels positifs.

En ce qui concerne les équivalents, on a un résultat plus fort

Théorème 7.4.3 *Soit* $\sum x_n$ *une série à terme général dans l'espace vectoriel normé* E *et* $\sum y_n$ *une série* **à termes réels positifs**. *On suppose qu'il existe* $\ell \in E \setminus \{0\}$ *tel que* $x_n \sim \ell y_n$. *Alors les deux séries sont simultanément convergentes ou divergentes.*

Démonstration Si $\sum y_n$ converge, on a $x_n = O(y_n)$ et $y_n \geq 0$, donc la série $\sum x_n$ est absolument convergente. Inversement, supposons que la série $\sum x_n$ converge. Puisque $x_n - \ell y_n = o(\ell y_n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \|x_n - \ell y_n\| \leq \frac{1}{2}\|\ell y_n\| = \frac{1}{2}\|\ell\| y_n$. En sommant on obtient $\|\sum_{n=p}^{q} x_n - \ell \sum_{n=p}^{q} y_n\| \leq \frac{1}{2}\|\ell\| \sum_{n=p}^{q} y_n$. On en déduit

$$\begin{aligned} \|\ell\| \sum_{n=p}^{q} y_n &= \|\ell \sum_{n=p}^{q} y_n\| \leq \|\ell \sum_{n=p}^{q} y_n - \sum_{n=p}^{q} x_n\| + \|\sum_{n=p}^{q} x_n\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\ell\| \sum_{n=p}^{q} y_n + \|\sum_{n=p}^{q} x_n\| \end{aligned}$$

d'où en définitive $\sum_{n=p}^{q} y_n \leq \frac{2}{\|\ell\|}\|\sum_{n=p}^{q} x_n\|$. La série $\sum x_n$ converge, donc vérifie le critère de Cauchy. Il en est donc de même de la série $\sum y_n$, qui est par suite convergente.

7.4.3 Règles classiques

Il suffit maintenant d'appliquer ces résultats à des séries étalons, comme les séries de Riemann ou les séries géométriques.

Lemme 7.4.4 *Soit* a *un nombre complexe. La série* $\sum a^n$ *converge si et seulement si* $|a| < 1$.

Démonstration La condition est évidemment nécessaire puisque le terme général doit tendre vers 0. Supposons la vérifiée. On a $\sum_{p=0}^{n} a^p = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ qui admet la limite $\frac{1}{1-a}$. Donc la série converge.

Théorème 7.4.5 *(règle de d'Alembert). Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit $\sum x_n$ une série à termes dans E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et telle que la suite $(\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|})$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors*

- *(i) si $\ell < 1$, la série converge absolument*
- *(ii) si $\ell > 1$, la série diverge*

Démonstration (i) Si $\ell < 1$, soit ρ tel que $\ell < \rho < 1$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq \rho$ soit $\|x_{n+1}\| \leq \rho\|x_n\|$. On a donc alors par récurrence $\|x_n\| \leq \rho^{n-N}\|x_N\| = O(\rho^n)$. Comme la série $\sum \rho^n$ converge, la série $\sum x_n$ converge absolument.

(ii) Si $\ell > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > 1$ soit $\|x_{n+1}\| > \|x_n\|$. On a donc alors par récurrence $\|x_n\| > \|x_N\|$. La suite (x_n) ne peut donc pas avoir 0 pour limite et la série diverge.

Remarque 7.4.3 Si $\ell = 1$ on ne peut rien conclure comme le montre l'exemple des séries de Riemann. Lorsque la règle de d'Alembert s'applique, elle conduit à des convergences rapides (de type exponentielle) ou des divergences grossières (le terme général ne tend pas vers 0).

Théorème 7.4.6 *(règle de Riemann). Soit E un espace vectoriel normé. Soit $\sum x_n$ une série à termes dans E.*

- *(i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $x_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$, alors la série converge absolument*
- *(ii) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in E \setminus \{0\}$ tels que $x_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$ alors la série converge absolument si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.*
- *(iii) Si $E = \mathbb{R}$ et $x_n \geq 0$, et s'il existe $\alpha \leq 1$ et $\ell > 0$ (y compris $+\infty$) tel que $\lim n^\alpha x_n = \ell$, alors la série diverge.*

Démonstration (i) et (ii) résultent de ce qui précède. Pour (iii), il suffit de remarquer que les hypothèses impliquent que $\frac{1}{n^\alpha} = O(x_n)$. Comme $\alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc aussi la série $\sum x_n$.

7.4.4 Règles complémentaires

Théorème 7.4.7 *(règle de Cauchy). Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit $\sum x_n$ une série à termes dans E telle que la suite $\left(\sqrt[n]{\|x_n\|}\right)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors*

- *(i) si $\ell < 1$, la série converge absolument*
- *(ii) si $\ell > 1$, la série diverge*

Démonstration (i) Si $\ell < 1$, soit ρ tel que $\ell < \rho < 1$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{\|x_n\|} \leq \rho$ soit $\|x_n\| \leq \rho^n$. Comme la série $\sum \rho^n$ converge, la série $\sum x_n$ converge absolument.

(ii) Si $\ell > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{\|x_n\|} > 1$ soit $\|x_n\| > 1$. La suite (x_n) ne peut donc pas avoir 0 pour limite et la série diverge.

Théorème 7.4.8 *(règle de Duhamel). Soit $\sum x_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et telle que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$. Alors*

- *(i) si $\lambda > 1$, la série converge*
- *(ii) si $\lambda < 1$, la série diverge*

Démonstration Posons $y_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$. On en déduit que si $\alpha \neq \lambda$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} \sim \frac{\alpha - \lambda}{n}$ est pour n assez grand du signe de $\alpha - \lambda$. Si $\lambda < 1$, soit α tel que $\lambda < \alpha < 1$. On a donc pour $n \geq N$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ et comme la série $\sum y_n$ diverge (car $\alpha < 1$), la série $\sum x_n$ diverge. Si $\lambda > 1$, soit α tel que $\lambda > \alpha > 1$. On a donc pour $n \geq N$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ et comme la série $\sum y_n$ converge (car $\alpha > 1$), la série $\sum x_n$ converge.

7.4.5 Comparaison à une intégrale

Théorème 7.4.9 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que f' soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Posons $w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt - f(n)$. Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.*

Démonstration On a par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^{n} (t - n + 1) f'(t)\, dt &= [(t - n + 1) f(t)]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt \\ &= -w_n \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} (t - n + 1) |f'(t)|\, dt \leq \int_{n-1}^{n} |f'(t)|\, dt$$

et donc
$$\sum_{p=1}^{n} |w_p| \leq \int_0^n |f'(t)|\, dt \leq \int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt$$
ce qui montre la convergence de la série à termes positifs $\sum |w_n|$ et donc la convergence absolue de la série.

Corollaire 7.4.10 *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que f et f' soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Alors la série $\sum f(n)$ est absolument convergente.*

Démonstration En effet la série $\sum \int_{n-1}^{n} |f(t)|\, dt$ est convergente car
$$\sum_{p=1}^{n} \int_{n-1}^{n} |f(t)|\, dt = \int_0^n |f(t)|\, dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$$
et comme $\left| \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt \right| \leq \int_{n-1}^{n} |f(t)|\, dt$, la série $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$ est absolument convergente. Comme $\sum w_n$ est également absolument convergente, il en est de même de la série $\sum f(n)$.

7.5 Séries semi-convergentes

7.5.1 Séries alternées

Théorème 7.5.1 *(convergence des séries alternées). Soit (a_n) une suite de nombres réels,* **décroissante***, de limite 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge ; le reste d'ordre n est du signe de son premier terme (c'est-à-dire $(-1)^{n+1}$) et sa valeur absolue est majorée par la valeur absolue de ce premier terme (c'est-à-dire a_{n+1}).*

Démonstration On a $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$. La suite (S_{2n}) est donc décroissante, la suite S_{2n+1} est croissante ; comme $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ est positif et tend vers 0, ces deux suites forment un couple de suites adjacentes ; elles admettent donc une limite commune S qui est limite de la suite S_n. On a pour tout n, $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. Ceci nous montre que $0 \leq -R_{2n} = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ et que $0 \leq R_{2n-1} = S - S_{2n-1} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$ d'où les assertions sur le reste.

7.5.2 Etude de séries semi-convergentes

Les théorèmes de comparaison ne s'appliquent pas aux séries quelconques. Ainsi on a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ alors que la première est convergente et la deuxième divergente (somme d'une série convergente et d'une série divergente). Pour une série à termes réels, on peut envisager le plan suivant

(i) regarder si le critère de convergence des séries alternées s'applique ($a_n = (-1)^n|a_n|$ avec $|a_n|$ **décroissant** de limite 0).

(ii) si $a_n = (-1)^n|a_n|$ mais si on ne peut pas appliquer le critère de convergence des séries alternées, on peut essayer de trouver une série alternée $\sum b_n$ qui relève de ce critère telle que $a_n \sim b_n$; alors, comme la série $\sum b_n$ converge, la nature de la série $\sum a_n$ sera la même que celle de la série $\sum(a_n - b_n)$, avec $a_n - b_n = o(a_n)$; on essayera de poursuivre le processus jusqu'à tomber soit sur une série divergente, soit sur une série absolument convergente

(iii) si a_n n'est pas alterné en signes, on peut utiliser une sommation par paquets (cf plus loin) : en regroupant les termes consécutifs de même signe, on aboutira à une série alternée en signe à laquelle on pourra appliquer l'une des méthodes précédentes

Enfin, pour une série à termes non réels ou qui ne relève pas d'une des méthodes précédentes, on pourra utiliser un théorème d'Abel comme le suivant

Théorème 7.5.2 *Soit (a_n) une suite de nombres réels et (x_n) une suite de l'espace vectoriel normé complet E telles que*

- *(i)* $\exists M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|\sum_{p=0}^{n} x_p\| \leq M$
- *(ii) la suite (a_n) tend vers 0 en* **décroissant**.

Alors la série $\sum a_n x_n$ converge.

Démonstration On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} a_n x_n &= \sum_{n=p}^{q} a_n (S_n(x) - S_{n-1}(x)) \\
&= \sum_{n=p}^{q} a_n S_n(x) - \sum_{n=p}^{q} a_n S_{n-1}(x) \\
&= \sum_{n=p}^{q} a_n S_n(x) - \sum_{n=p-1}^{q-1} a_{n+1} S_n(x) \\
&\quad \text{(changement d'indices } n-1 \mapsto n) \\
&= a_q S_q(x) - a_p S_{p-1}(x) + \sum_{n=p}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) S_n(x)
\end{aligned}$$

On a effectué ici une transformation dite *transformation d'Abel*.

Comme $\forall n,\ \|S_n(x)\| \leq M$ on a

$$\|\sum_{n=p}^{q} a_n x_n\| \leq M(|a_q| + |a_p| + \sum_{n=p}^{q-1} |a_n - a_{n+1}|) = 2M a_p$$

en tenant compte de $a_n \geq 0$ et $a_n - a_{n+1} \geq 0$. Comme $\lim a_p = 0$, la série $\sum a_n x_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle converge.

7.6 Opérations sur les séries

7.6.1 Combinaisons linéaires

Proposition 7.6.1 *Soit E un espace vectoriel normé, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes dans E, α et β deux scalaires. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes (resp. absolument convergentes), il en est de même de la série $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ et alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Démonstration Le résultat a déjà été vu pour la convergence ; pour la convergence absolue, il résulte de $\|\alpha a_n + \beta b_n\| \leq |\alpha|\,\|a_n\| + |\beta|\,\|b_n\|$

Corollaire 7.6.2 *Soit (z_n) une suite de nombres complexes, $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum z_n$ est convergente (resp. absolument convergente) si et seulement si les deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ le sont.*

Démonstration Le sens direct résulte de $x_n = \dfrac{1}{2}(z_n + \overline{z_n})$ et $y_n = \dfrac{1}{2i}(z_n - \overline{z_n})$. La réciproque est évidente.

7.6.2 Sommation par paquets

Théorème 7.6.3 *(Sommation par paquets) Soit E un espace vectoriel normé, $\sum x_n$ une série à termes dans E, φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On pose $y_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} x_k$ et pour $n \geq 1$, $y_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_k$. Alors*

- *(i) si la série $\sum x_n$ converge, la série $\sum y_n$ converge et a même somme*
- *(ii) la réciproque est vraie dans les deux cas suivants*
  - *(a) la suite x_n tend vers 0 et la suite $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ (la taille des "paquets") est majorée*
  - *(b) $E = \mathbb{R}$ et à l'intérieur de chaque "paquet" ($k \in [\varphi(n-1)+1, \varphi(n)]$), tous les x_k, sont de même signe.*

Démonstration On a d'abord

$$S_n(y) = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_k\right) = \sum_{k=0}^{\varphi(n)} x_k = S_{\varphi(n)}(x)$$

(en convenant que $\varphi(-1) = -1$). La suite $S_n(y)$ est donc une sous suite de la suite $S_n(x)$, ce qui montre l'assertion (i).

(ii.a) Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ et K tel que $\forall n,\ \varphi(n+1) - \varphi(n) \leq K$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p l'unique entier tel que $\varphi(p-1) < n \leq \varphi(p)$. On a alors

$$S_p(y) - S_n(x) = S_{\varphi(p)}(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} x_k$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Alors pour $n \geq N$, on a $\|S_p(y) - S_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} \|x_k\| \leq (\varphi(p) - n)\frac{\varepsilon}{2K} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Mais il existe N' tel que $q \geq N' \Rightarrow \|S - S_q(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si on choisit $n \geq \max(N, \varphi(N'))$, on a $p \geq N'$ et donc

$$\|S - S_n(x)\| \leq \|S - S_p(y)\| + \|S_p(y) - S_n(x)\| < \varepsilon$$

ce qui montre que la série $\sum x_n$ converge.

(ii.b) La démonstration est similaire mais on remarque que

$$\begin{aligned} |S_p(y) - S_n(x)| &= |\sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} x_k| = \sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} |x_k| \\ &\leq \sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} |x_k| = |\sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} x_k| \\ &= |y_p| \end{aligned}$$

(car tous les x_k sont de même signe). Comme la série $\sum y_q$ converge, pour $q \geq N$ on a $|y_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour $n \geq \varphi(N)$, on a $p \geq N$ et donc $|S_p(y) - S_n(x)| \leq |y_p| < \frac{\varepsilon}{2}$. On achève alors la démonstration comme dans le cas précédent.

Remarque 7.6.1 La réciproque de (i) n'est pas valable en toute généralité comme le montre l'exemple de la série $\sum(-1)^n$ et de $\varphi(n) = 2n$. On a alors $y_n = 0$, la série $\sum y_n$ converge alors que la série $\sum x_n$ est divergente. La réciproque (ii.b) est particulièrement intéressante pour le cas de séries de nombres réels qui ne sont pas de signe constant ; en regroupant ensemble les termes consécutifs de même signe, on obtient une série de même nature que la série initiale et dont les termes sont alternés en signe.

7.6.3 Modification de l'ordre des termes

Nous allons ici étudier l'effet d'une permutation sur les termes d'une série convergente. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant.

Théorème 7.6.4 *Soit $\sum x_n$ une série à termes réels ou complexes absolument convergente et soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective, une permutation de $\mathbb{N}$. Alors la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.*

Démonstration **Premier cas : série à termes réels positifs.** Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le plus grand élément de $\sigma([0,n])$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)} \leq \sum_{p=0}^{N_n} x_p \leq \sum_{p=0}^{+\infty} x_p$$

ce qui montre que la série à termes réels positifs $\sum x_{\sigma(k)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Mais les deux séries jouent un rôle symétrique puisque $x_n = x_{\sigma^{-1}(\sigma(n))}$, et donc on a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ ce qui nous donne l'égalité.

Deuxième cas : séries à termes réels On introduit, comme d'habitude, pour $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(x, 0) \in \mathbb{R}^+$ et $x^- = \max(-x, 0) \in \mathbb{R}^+$ si bien que $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$. On a alors $0 \leq x_n^+ \leq |x_n|$ et $0 \leq x_n^- \leq |x_n|$, ce qui montre que les deux séries à termes positifs $\sum x_n^+$ et $\sum x_n^-$ sont convergentes. D'après le premier cas de la démonstration, les deux séries $\sum x_{\sigma(n)}^+$ et $\sum x_{\sigma(n)}^-$ sont convergentes et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^+, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^-$$

Comme $|x_{\sigma(n)}| = x_{\sigma(n)}^+ + x_{\sigma(n)}^-$, la série $\sum |x_{\sigma(n)}|$ converge, donc la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et comme $x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)}^+ - x_{\sigma(n)}^-$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

Troisième cas : séries à termes complexes On travaille de la même façon avec les parties réelles et parties imaginaires. On a $0 \leq |\operatorname{Re}(x_n)| \leq |x_n|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(x_n)| \leq |x_n|$, ce qui montre que les deux séries $\sum \operatorname{Re}(x_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(x_n)$ sont absolument convergentes. D'après le deuxième cas de la démonstration, les deux séries $\sum \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)})$ et $\sum \operatorname{Im}(x_{\sigma(n)})$ sont absolument convergentes et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_n), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(x_n)$$

Comme $|x_{\sigma(n)}| \leq |\operatorname{Re}(x_{\sigma(n)})| + |\operatorname{Im}(x_{\sigma(n)})|$, la série $\sum |x_{\sigma(n)}|$ converge, donc la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et comme $x_{\sigma(n)} = \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)}) + i\operatorname{Re}(x_{\sigma(n)})$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)}) + i\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

Remarque 7.6.2 La condition de convergence absolue est indispensable à la validité du théorème. Considérons la série semi convergente $\sum x_n$ avec $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et soit S sa somme (on peut montrer que $S = \log 2$). Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(3k+1) = 2k+1$, $\varphi(3k+2) = 4k+2$ et $\varphi(3k+3) = 4k+4$. On vérifie facilement que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (la bijection réciproque est définie par des congruences modulo 4). Sommons alors par paquets de 3 la série $\sum x_{\varphi(n)}$. On a

$$\begin{aligned} & x_{\varphi(3k+1)} + x_{\varphi(3k+2)} + x_{\varphi(3k+3)} \\ = \; & \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} \\ = \; & \frac{1}{2}\,(x_{2k+1} + x_{2k+2}) \end{aligned}$$

Ceci montre (réciproque du théorème de sommation par paquets, la taille des paquets étant bornée et le terme général tendant vers 0) que la nouvelle série converge encore, mais que sa somme est la moitié de la somme de la série initiale.

7.6.4 Produit de Cauchy

Définition 7.6.1 *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels ou complexes. On appelle produit de Cauchy (ou produit de convolution) des deux séries, la série $\sum c_n$ avec*

$$\forall n \in \mathbb{N},\; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Théorème 7.6.5 *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels ou complexes, absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est une série absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Démonstration **Cas particulier : les deux séries sont à termes réels positifs.** Notons $K_n = [0,n] \times [0,n] \subset \mathbb{N}^2$ et $T_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leq n\}$. On a évidemment

$T_n \subset K_n \subset T_{2n}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} c_k &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} a_p b_q = \sum_{(p,q)\in T_n} a_p b_q \leq \sum_{(p,q)\in K_n} a_p b_q \\ &= \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{q=0}^{n} b_q \leq \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \sum_{q=0}^{+\infty} b_q\end{aligned}$$

La série $\sum c_n$ est une série à termes réels positifs dont les sommes partielles sont majorées, donc elle converge. De plus les inclusions $T_n \subset K_n \subset T_{2n}$ se traduisent par $S_n(c) \leq S_n(a)S_n(b) \leq S_{2n}(c)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S(c) = S(a)S(b)$ ce qui est la formule souhaitée.

Cas général Posons $a'_n = |a_n|$, $b'_n = |b_n|$ et $c'_n = \sum_{p+q=n} |a_p||b_q|$ leur produit de Cauchy, et désignons par $S_n(a'), S_n(b')$ et $S_n(c')$ les sommes partielles d'indice n de ces trois séries. Puisque les séries $\sum a'_n$ et $\sum b'_n$ sont convergentes, le cas particulier ci dessus montre que la série $\sum c'_n$ est convergente et que sa somme est le produit des sommes de ces deux séries. Mais, comme $|c_n| \leq c'_n$, on en déduit la convergence absolue de la série $\sum c_n$. On a alors

$$\begin{aligned}|S_n(a)S_n(b) - S_n(c)| &= \left|\sum_{(p,q)\in K_n} a_p b_q - \sum_{(p,q)\in T_n} a_p b_q\right| = \left|\sum_{(p,q)\in K_n\setminus T_n} a_p b_q\right| \\ &\leq \sum_{(p,q)\in K_n\setminus T_n} |a_p||b_q| = \sum_{(p,q)\in K_n} |a_p||b_q| - \sum_{(p,q)\in T_n} |a_p||b_q| = S_n(a')S_n(b') - S_n(c')\end{aligned}$$

Puisque la somme de la série $\sum c'_n$ est le produit des sommes des deux séries $\sum a'_n$ et $\sum b'_n$, on a $\lim_{n\to+\infty}(S_n(a')S_n(b') - S_n(c')) = 0$ et donc par la majoration ci-dessus $\lim_{n\to+\infty}(S_n(a)S_n(b) - S_n(c)) = 0$, ce qui montre que la somme de la série $\sum c_n$ est le produit des sommes des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et achève la démonstration.

Remarque 7.6.3 On aurait pu passer aussi du cas réel positif au cas complexe en utilisant, comme dans le théorème de permutation des termes, les parties positives x^+ et x^- d'un réel x, puis les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, mais la démonstration n'aurait pas pu se généraliser comme nous le ferons ci-dessous au cas d'une application bilinéaire plus générale.

Remarque 7.6.4 Le théorème ci dessus n'est plus valable pour des séries convergentes : posons $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. On a $|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Mais pour $k \in [0,n]$, $(k+1)(n-k+1) \leq (\dfrac{n}{2}+1)^2$ (facile). Donc $|c_n| \geq \dfrac{n+1}{\frac{n}{2}+1}$ qui tend vers 2 ; donc la suite (c_n) ne tend pas vers 0 et la série $\sum c_n$ diverge.

On a une généralisation du théorème précédent sous la forme suivante qui nous sera utile quand nous considérerons des séries d'endomorphismes.

Théorème 7.6.6 *Soit E, F et G sont trois espaces vectoriels normés, $u : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue, $\sum a_n$ une série à termes dans E absolument convergente, $\sum b_n$ une série à termes dans F absolument convergente, et si l'on pose $c_n = \sum_{p+q=n} u(a_p, b_q)$, alors la série $\sum c_n$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = u\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Démonstration La démonstration est tout à fait similaire : utiliser l'existence d'un réel positif K tel que $\|u(x,y)\| \leq K\|x\|\,\|y\|$ pour montrer que $|S_n(a)S_n(b) - S_n(c)| \leq K\left(S_n(a')S_n(b') - S_n(c')\right)$ en posant $a'_n = \|a_n\|$, $b'_n = \|b_n\|$ et $c'_n = \sum_{p+q=n} \|a_p\|\|b_q\|$

7.7 Séries doubles

En anticipant un peu sur le chapitre concernant les séries de fonctions, nous ferons appel au lemme suivant pour la démonstration du théorème fondamental sur les séries doubles.

Lemme 7.7.1 ***(Weierstrass : théorème de convergence dominée pour les séries)*** *Soit $(x_{n,q})_{(n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée qar $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. On fait les hypothèses suivantes*

- *il existe une séries à termes réels positifs $\sum \alpha_n$ convergente telle que $\forall q \in \mathbb{N}, |x_{n,q}| \leq \alpha_n$*
- *pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{q\to+\infty} x_{n,q}$ existe (on appelle y_n cette limite)*

Alors, pour chaque $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n x_{n,q}$ est absolument convergente ainsi que la série $\sum_n y_n$, la suite $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ admet une limite quand q tend vers $+\infty$ et on a

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

autrement dit

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{q\to+\infty} x_{n,q}$$

(interversion de la limite et du signe somme)

Démonstration L'inégalité $|x_{n,q}| \leq \alpha_n$, celle qui s'en déduit par passage à la limite $|y_n| \leq \alpha_n$ et la convergence de la série $\sum \alpha_n$ montrent les convergences absolues des séries $\sum_n x_{n,q}$ et $\sum_n y_n$. Prenons donc $\varepsilon > 0$ et choisissons M tel que $\sum_{n=M+1}^{+\infty} \alpha_n < \frac{\varepsilon}{4}$. On a alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} y_n - \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}\right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n - x_{n,q}| \leq \sum_{n=0}^{M} |y_n - x_{n,q}| + \sum_{n=M+1}^{+\infty} (|y_n| + |x_{n,q}|) \\ &\leq \sum_{n=0}^{M} |y_n - x_{n,q}| + 2\sum_{n=M+1}^{+\infty} \alpha_n \leq \sum_{n=0}^{M} |y_n - x_{n,q}| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Maintenant, on a $\lim_{q\to+\infty} \sum_{n=0}^{M} |y_n - x_{n,q}| = 0$ (chacun des termes de cette somme admet 0 pour limite), et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq N \Rightarrow \sum_{n=0}^{M} |y_n - x_{n,q}| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc

$$q \geq N \Rightarrow \left|\sum_{n=0}^{+\infty} y_n - \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui montre que la suite $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ admet la limite $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ quand q tend vers $+\infty$.

Remarque 7.7.1 Le lecteur qui a déjà des connaissances sur les séries de fonctions, remarquera qu'il s'agit là tout simplement du théorème d'interversion des limites dans le cas de convergence normale (donc uniforme) d'une série de fonctions.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème d'interversion des signes *somme* dans les séries doubles.

Théorème 7.7.2 *Soit* $u = (u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une famille de nombres réels ou complexes indexée par* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*. On suppose que*

- *pour tout entier* n *la série* $\sum_p u_{n,p}$ *est absolument convergente*
- *la série* $\sum_n \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ *est convergente*

Alors les séries $\sum_n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$ *et* $\sum_p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$ *sont convergentes et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$$

Démonstration Nous allons appliquer le lemme précédent en posant $x_{n,q} = \sum_{p=0}^{q} u_{n,p}$ et $\alpha_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ et bien entendu $y_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \lim_{q\to+\infty} x_{n,q}$. Les hypothèses du lemme étant évidemment vérifiées, on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}$ admet la limite $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ quand q tend vers $+\infty$. Mais, puisque l'on a l'égalité $|u_{n,p}| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$, la série $\sum_n u_{n,p}$ est absolument convergente pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{q} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{q} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$$

L'existence de $\lim_{q\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}$ montre donc que la série $\sum_p \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ autrement dit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

Remarque 7.7.2 En appliquant le théorème à la suite $u' = (|u_{n,p}|)_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, on constate que la série $\sum_p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right)$ est convergente, ce qui implique la convergence absolue de la série $\sum_p \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

Remarque 7.7.3 On pourra retenir le théorème précédent sous la forme suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right) < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

7.8 Espaces de suites

Définition 7.8.1 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si la série $\sum x_n$ est absolument convergente.*

Proposition 7.8.1 *L'ensemble $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables de nombres complexes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. L'application $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est une norme sur cet espace vectoriel. L'application $u \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est linéaire de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration Si (u_n) et (v_n) sont deux suites sommables et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, les suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont sommables ; il en est donc de même de la suite $(|\alpha||u_n| + |\beta||v_n|)$ (résultat sur les séries à réels positifs) et donc de la suite $(|\alpha u_n + \beta v_n|)$ puisque $|\alpha u_n + \beta v_n| \leq |\alpha||u_n| + |\beta||v_n|$. Donc la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est sommable. La suite nulle étant de surcroît sommable, l'ensemble $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables de nombres complexes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La vérification des propriétés d'une norme est élémentaire. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha u_n + \beta v_n) &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p}(\alpha u_n + \beta v_n) \\
&= \alpha \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n + \beta \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} v_n \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n
\end{aligned}$$

d'où la linéarité de $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 7.8.2 *L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites de nombres complexes dont les carrés forment une suite sommable est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. L'application $(u, v) = \big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) \mapsto (u \mid v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$ est un produit scalaire hermitien sur cet espace ; en conséquence l'application $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2}$ est une norme sur cet espace vectoriel.*

Démonstration Il est clair que si (u_n) est de carré sommable, il en est de même de $\alpha(u_n) = (\alpha u_n)$. Si (u_n) et (v_n) sont de carré sommable, l'inégalité élémentaire $|u_n + v_n|^2 \leq 2|u_n|^2 + 2|v_n|^2$ montre que la suite $(u_n + v_n)$ est de carré sommable. La suite nulle étant de surcroît de carré sommable, les suites de carrés sommables forment donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) et (v_n) sont de carré sommable, l'inégalité élémentaire $|\overline{u_n} v_n| \leq \frac{1}{2}|u_n|^2 + \frac{1}{2}|v_n|^2$ montre que la suite $(\overline{u_n} v_n)$ est sommable. On peut donc poser $(u \mid v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$. Il est clair que $(u, v) \mapsto (u \mid v)$ est sesquilinéaire hermitienne. De plus, si $u \neq 0$, $(u \mid u) \in \mathbb{R}^{+*}$ ce qui montre que cette forme sesquilinéaire est définie positive ; on a donc un produit scalaire hermitien et la norme associée est $\|u\|_2^2 = (u \mid u)$.

Remarque 7.8.1 Le théorème ci dessus n'est plus valable pour des séries convergentes : posons $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. On a $|c_n| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Mais pour $k \in [0, n]$, $(k+1)(n-k+1) \leq (\dfrac{n}{2}+1)^2$ (facile). Donc $|c_n| \geq \dfrac{n+1}{\frac{n}{2}+1}$ qui tend vers 2 ; donc la suite (c_n) ne tend pas vers 0 et la série $\sum c_n$ diverge.

7.9 Compléments : développements asymptotiques, analyse numérique

7.9.1 Calcul approché de la somme d'une série

L'idée naturelle est d'approcher la somme S de la série convergente $\sum x_n$ par une somme partielle $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n$. L'erreur de méthode est évidemment égale à $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n$. Bien entendu, à cette erreur de méthode vient s'ajouter une erreur de calcul de la somme S_N que l'on peut estimer majorée par $N\varepsilon$ où ε est la précision de l'instrument de calcul. Entre la valeur cherchée S et la valeur calculée $\overline{S_N}$ il y a donc une erreur du type $|S - \overline{S_N}| \leq |R_N| + N\varepsilon = \delta(N)$ que l'on cherchera donc à minimiser (la fonction δ tend manifestement vers $+\infty$ quand N croît indéfiniment).

Etudions pour cela deux cas. Dans le premier cas, la série est à convergence géométrique : $|x_n| \leq A\rho^n$ avec $\rho < 1$. Alors $R_N \leq B\rho^N$ et $\delta(N) \leq \delta_1(N) = B\rho^N + N\varepsilon$. On a $\delta_1'(t) = B(\log\rho)\rho^t + \varepsilon$ qui s'annule pour $t = t_0 = \dfrac{1}{\rho}\log\left|\dfrac{\varepsilon}{B\log\rho}\right|$. On a intérêt à choisir N aussi proche que possible de t_0 où la fonction δ_1 atteint son minimum.

Exemple 7.9.1 : $\varepsilon = 10^{-8}, B = 1, \rho = \dfrac{9}{10}$. On trouve un N de l'ordre de 150 pour une erreur de l'ordre de 10^{-5}. C'est parfaitement raisonnable.

Dans le second cas, la série est à convergence polynomiale : $|x_n| \leq \dfrac{A}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Alors $R_N \leq \dfrac{B}{n^{\alpha-1}}$ et $\delta(N) \leq \delta_1(N) = \dfrac{B}{N^{\alpha-1}} + N\varepsilon$. On a $\delta_1'(t) = B(1-\alpha)t^{-\alpha} + \varepsilon$ qui s'annule pour $t = t_0 = \left(\dfrac{B(\alpha-1)}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. On a intérêt à choisir N aussi proche que possible de t_0 où la fonction δ_1 atteint son minimum.

Exemple 7.9.2 : $\varepsilon = 10^{-8}, B = 1, \alpha = \dfrac{11}{10}$. On trouve un N de l'ordre de 10^7 pour une erreur de l'ordre de $0,25$. On voit que la méthode fournit un résultat très médiocre en un temps très long ; elle demande donc à être améliorée par une accélération de convergence.

7.9.2 Accélération de la convergence

Supposons que x_n admet un développement asymptotique de la forme

$$x_n = \frac{a_o}{n^K} + \frac{a_1}{n^{K+1}} + \ldots + \frac{a_N}{n^{K+N}} + \varepsilon_n$$

avec $|\varepsilon_n| \leq \dfrac{A}{n^{K+N+1}}$. Posons $u_n = \dfrac{b_o}{n^{K-1}} + \ldots + \dfrac{b_N}{n^{K+N-1}}$ (où $b_o, \ldots, b_N$ sont des coefficients à déterminer) puis $y_n = u_n - u_{n+1}$, et cherchons à déterminer les b_i de telle sorte que $|x_n - y_n| \leq \dfrac{B}{n^{K+N+1}}$ (pour une certaine constante B), c'est-à-dire, $x_n - y_n = O(\dfrac{1}{n^{K+N+1}})$.

On a $u_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \frac{b_i}{n^{K+i-1}}$, d'où

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=0}^{N} b_i \left(\frac{1}{n^{K+i-1}} - \frac{1}{(n+1)^{K+i-1}} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{N} b_i \frac{1}{n^{K+i-1}} \left(1 - (1 + \frac{1}{n})^{1-K-i} \right) \end{aligned}$$

On sait que la fonction $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ admet au voisinage de 0 un développement limité $f_\alpha(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} c_k^{(\alpha)} x^k + O(x^{p+1})$ avec $c_k^{(\alpha)} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$. On en déduit que

$$1 - (1 + \frac{1}{n})^{1-K-i} = - \sum_{k=1}^{N+1-i} c_k^{(1-K-i)} \frac{1}{n^k} + O(\frac{1}{n^{N+2-i}})$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{K+i-1}} \left(1 - (1 + \frac{1}{n})^{1-K-i} \right) &= - \sum_{k=1}^{N+1-i} c_k^{(1-K-i)} \frac{1}{n^{k+K+i-1}} + O(\frac{1}{n^{N+K+1}}) \\ &= - \sum_{k=i}^{N} c_{k+1-i}^{(1-K-i)} \frac{1}{n^{k+K}} + O(\frac{1}{n^{N+K+1}}) \end{aligned}$$

après changement d'indices. On en déduit

$$\begin{aligned} y_n &= - \sum_{i=0}^{N} b_i \sum_{k=i}^{N} c_{k+1-i}^{(1-K-i)} \frac{1}{n^{k+K}} + O(\frac{1}{n^{N+K+1}}) \\ &= - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{n^{k+K}} \sum_{i=0}^{k} b_i c_{k+1-i}^{(1-K-i)} + O(\frac{1}{n^{N+K+1}}) \end{aligned}$$

Donc

$$x_n - y_n = O(\frac{1}{n^{K+N+1}}) \iff \forall k \in [0,n],\ a_k + \sum_{i=0}^{k} b_i c_{1-k-i}^{(1-K-i)} = 0$$

Il s'agit d'un système triangulaire en les inconnues b_i qui admet une unique solution. En faisant le changement d'indice $j = k+1-i$, on obtient le système

$$\forall k \in [0,n],\ a_k + \sum_{j=1}^{k+1} b_{k+1-j} c_j^{(-K-k+j)} = 0$$

On calcule donc les b_k à l'aide de la formule de récurrence $c_1^{(-K-k+1)} b_k = -a_k - \sum_{j=2}^{k+1} b_{k+1-j} c_j^{(-K-k+j)}$ où les $c_j^{(t+j)}$ sont définis par récurrence par $c_1^{(t+1)} = t+1$ et $c_{j+1}^{(t+j+1)} = \frac{t+j+1}{j+1} c_j^{(t+j)}$. Supposons les b_i déterminés. Il existe une constante B telle que $|x_n - y_n| \leq \frac{B}{n^{K+N+1}}$. L'erreur faite en approchant la somme de la série $\sum (x_n - y_n)$ par sa somme partielle d'indice n est donc majorée par $\frac{B}{K+N} \frac{1}{n^{K+N}}$. Mais la somme partielle d'indice n de la série est

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) = S_n + u_1 - u_{n+1}$$

et la somme de la série est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n - \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = S - u_1$$

(puisque $\lim u_n = 0$). On a donc $|S - S_n + u_{n+1}| \leq \frac{B}{K+N} \frac{1}{n^{K+N}}$ et $S_n - u_{n+1}$ est donc une bien meilleure valeur approchée de S que S_n.

Bien entendu ces méthodes peuvent se généraliser à d'autres types de développements asymptotiques : l'idée générale étant de trouver une suite u_n telle que la série $x_n - (u_n - u_{n+1})$ ait une décroissance vers 0 aussi rapide que possible. Alors $S_n - u_{n+1}$ est donc une bien meilleure valeur approchée de S que S_n. Cette méthode fournira également des développements asymptotiques de restes de séries car si $x_n - (u_n - u_{n+1}) = o(v_n)$, on aura $R_n(x) + u_{n+1} = o(R_n(v))$ et donc le développement $R_n(x) = -u_{n+1} + o(R_n(v))$.

En ce qui concerne les développements asymptotiques de sommes partielles de séries divergentes, on se ramènera à la situation précédente en remplaçant la série x_n par une série du type $y_n = x_n - (v_n - v_{n-1})$ de telle sorte que la série $\sum y_n$ converge. On aura alors $S_n(x) = v_n - v_0 + S_n(y) = v_n + A + R_n(y)$ où $A = S(y) - v_0$ est une constante (sa valeur ne pourra pas être obtenue directement par cette méthode). Il suffira ensuite d'appliquer la méthode précédente pour obtenir un développement asymptotique de $R_n(y)$ à la précision souhaitée, et donc aussi un développement asymptotique de $R_n(x)$.

Nous allons traiter deux exemples importants des techniques ci dessus.

Exemple 7.9.3 On recherche un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \log(n) - \log(n-1) = -\log(1 - \frac{1}{n})$. On a $z_n = x_n - y_n = \frac{1}{n} - \log(1 - \frac{1}{n}) = -\frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})$. On en déduit que la série $\sum z_n$ converge. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x_k &= 1 + \sum_{k=2}^{n} z_k + \sum_{k=2}^{n} y_k = 1 + \sum_{k=2}^{n} z_k + \sum_{k=2}^{n} (\log k - \log(k-1)) \\ &= \log n + (1 + \sum_{k=2}^{+\infty} z_k) - R_n(z) \end{aligned}$$

Mais les théorèmes de comparaison des séries à termes de signes constants assurent que puisque $z_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, on a $R_n(z) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{2n}$. Posons alors $\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} z_k$ (la constante d'Euler) ; on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

(en fait il est clair que les techniques ci dessus permettent d'obtenir un développement à un ordre arbitraire).

Exemple 7.9.4 Nous allons maintenant montrer la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$. Pour cela posons $a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}}$ et $b_n = \log a_n - \log a_{n-1}$ (pour $n \geq 2$). On a

$$\begin{aligned} b_n &= \log \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log \frac{n! e^n (n-1)^{n-1/2}}{(n-1)! e^{n-1} n^{n+1/2}} \\ &= \log \left(e \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n-1/2}} \right) = 1 + (n - \frac{1}{2}) \log(1 - \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

d'où $b_n = 1 + (n - \frac{1}{2})(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^n} - \frac{1}{3n^3} + O(\frac{1}{n^4})) = -\frac{1}{12n^2} + O(\frac{1}{n^3})$ On en déduit que la série $\sum b_n$ converge. Soit S sa somme. On a alors $\sum_{k=2}^{n} b_k = S - R_n(b)$, mais comme $b_n \sim -\frac{1}{12n^2}$, on a $R_n(b) \sim -\frac{1}{12} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{12n}$. On a d'autre part $\sum_{k=2}^{n} b_k = \log a_n - \log a_1$, d'où finalement $\log a_n = \sum_{k=2}^{n} b_k + \log a_1 = S + \log a_1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})$ et donc $a_n = e^{S + \log a_1} \exp(\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})) = \ell(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$ en posant $\ell = e^{S + \log a_1} > 0$, soit encore

$$n! = \ell \frac{n^{n+1/2}}{n!} \left(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}) \right)$$

La méthode précédente ne permet pas d'obtenir la valeur de ℓ ; on obtient celle ci classiquement à l'aide des intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. Pour $n \geq 2$, on écrit à l'aide d'une intégration par parties, en intégrant $\sin x$ et en dérivant $\sin^{n-1} x$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x\, dx \\ &= \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

d'où $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. En tenant compte de $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on a alors

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1}{(2p)(2p-2)\dots 4.2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

en multipliant numérateur et dénominateur par $(2p)(2p-2)\dots 4.2$ de manière à rétablir les facteurs manquant au numérateur. De même

$$I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 4.2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} = \frac{2^p (p!)^2}{(2p+1)!}$$

On en déduit en utilisant $n! \sim \ell\sqrt{n}\dfrac{n^n}{n!}$

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p+1)(2p)!^2}{2^{4p} p!^4}\frac{\pi}{2} \sim \frac{(2p+1)\ell^2 (2p)(2p)^{4p} e^{4p}}{2^{4p} e^{4p} \ell^4 p^2 p^{4p}}\frac{\pi}{2} \sim \frac{2\pi}{\ell^2}$$

Mais d'autre part, on a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ 0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x$, soit en intégrant $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ et en tenant compte de $\dfrac{I_{n-1}}{I_{n+1}} = \dfrac{n+1}{n}$, on obtient $1 \leq \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+1}{n}$ soit encore $\lim \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$. On en déduit que $\dfrac{2\pi}{\ell^2} = 1$ et comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{2\pi}$ ce qui achève la démonstration.

Index