

Table des matières

Avant-propos	ix
1 Ensembles et structures	1
1.1 Ensembles et relations	1
1.1.1 Relations d'équivalences	1
1.1.2 Relations d'ordre	2
1.1.3 Eléments extrémaux	3
1.1.4 L'axiome de Zorn	3
1.2 Cardinaux et entiers naturels	4
1.2.1 Notion de cardinal	4
1.2.2 Les entiers naturels	4
1.3 Groupes	5
1.3.1 Définitions et première propriété	5
1.3.2 Sous-groupes	6
1.3.3 Quotient par un sous-groupe	7
1.3.4 Morphisme de groupes	9
1.3.5 Le groupe \mathbb{Z}	10
1.3.6 Ordre d'un élément	11
1.3.7 Groupes finis	11
1.3.8 Groupes cycliques	12
1.3.9 Groupe opérant sur un ensemble	13
1.3.10 Groupe des permutations d'un ensemble fini	14
1.4 Anneaux et corps	16
1.4.1 Généralités sur les anneaux	16
1.4.2 Idéaux et quotients	17
1.4.3 Morphisme d'anneaux	18
1.4.4 Corps	18
1.4.5 Idéaux maximaux	19
1.4.6 Idéaux et anneaux principaux	20
1.4.7 Anneaux euclidiens	23
1.4.8 L'anneau \mathbb{Z} . Caractéristique d'un anneau	24
1.4.9 Théorème chinois, indicateur d'Euler	24
1.5 Polynômes à une variable	26
1.5.1 L'anneau des séries formelles à coefficients dans A	26

1.5.2	L'anneau des polynômes à coefficients dans A	26
1.5.3	Division euclidienne et racines	27
1.5.4	Dérivation	28
1.5.5	L'anneau principal $K[X]$	28
1.5.6	Formule de Taylor. Multiplicité d'une racine	29
1.5.7	Racines et extensions de corps	30
1.5.8	Polynômes sur \mathbb{C} et \mathbb{R}	30
1.5.9	Division suivant les puissances croissantes	31
1.6	Polynômes à plusieurs variables	31
1.6.1	Généralités	31
1.6.2	Dérivées partielles, formule de Taylor	32
1.6.3	Degré total, polynômes homogènes	32
1.6.4	Polynômes symétriques	33
2	Algèbre linéaire élémentaire	35
2.1	Généralités sur les espaces vectoriels	35
2.1.1	Notion de K -espace vectoriel	35
2.1.2	Notion de sous-espace vectoriel	35
2.1.3	Produits, quotients	36
2.1.4	Applications linéaires	36
2.1.5	Somme de sous-espaces	37
2.1.6	Algèbres	38
2.1.7	Familles libres, génératrices. Bases	39
2.1.8	Théorèmes fondamentaux	40
2.2	Bases et dimension	41
2.2.1	Existence de bases	41
2.2.2	Espaces vectoriels de dimension finie. Dimension	42
2.2.3	Résultats sur la dimension	42
2.3	Rang	44
2.3.1	Rang d'une famille de vecteurs	44
2.3.2	Rang d'une application linéaire	44
2.4	Dualité : approche restreinte	45
2.4.1	Formes linéaires, dual, formes coordonnées	45
2.4.2	Base duale d'un espace vectoriel de dimension finie	45
2.4.3	Orthogonalité 1	46
2.4.4	Hyperplans	47
2.4.5	Orthogonalité 2	48
2.4.6	Application : polynômes d'interpolation de Lagrange	49
2.5	Dualité : approche générale	50
2.5.1	Notion de dual. Orthogonalité	50
2.5.2	Hyperplans	51
2.5.3	Bidual	51
2.5.4	Transposée	52
2.5.5	Dualité en dimension finie	52
2.6	Matrices	53
2.6.1	Généralités	53

2.6.2	Matrices carrées	55
2.6.3	Transposée	56
2.6.4	Rang d'une matrice	57
2.6.5	La méthode du pivot	57
2.6.6	Changement de bases	59
2.6.7	Produit des matrices par blocs	61
2.7	Déterminants	61
2.7.1	Formes p -linéaires	61
2.7.2	Déterminant d'une famille de vecteurs	62
2.7.3	Déterminant d'un endomorphisme	63
2.7.4	Déterminant d'une matrice	64
2.7.5	Application des déterminants à la recherche du rang	67
2.7.6	Formes p -linéaires alternées	68
2.8	Systèmes linéaires	69
2.8.1	Position du problème	69
2.8.2	Systèmes de Cramer	70
2.8.3	Théorème de Rouché-Fontené	70
2.8.4	Méthode du pivot	72
3	Réduction des endomorphismes	73
3.1	Valeurs propres. Vecteurs propres	73
3.1.1	Sous-espaces stables	73
3.1.2	Valeurs propres, vecteurs propres	74
3.1.3	Polynôme caractéristique	75
3.1.4	Endomorphismes diagonalisables	77
3.1.5	Matrices diagonalisables	78
3.1.6	Endomorphismes et matrices trigonalisables	78
3.2	Polynômes d'endomorphismes	80
3.2.1	Généralités	80
3.2.2	Idéal annulateur. Polynôme minimal	81
3.2.3	Théorème de Cayley-Hamilton	82
3.2.4	Polynôme annulateur et trigonalisation	82
3.2.5	Décomposition des noyaux	83
3.2.6	Sous-espaces caractéristiques	85
3.2.7	Application : récurrences linéaires d'ordre 2	85
3.3	A propos de Jordan	87
3.3.1	Décomposition de Jordan	87
3.3.2	Applications	88
3.3.3	Réduction des endomorphismes nilpotents	91
3.3.4	Première démonstration	92
3.3.5	Deuxième démonstration	93
3.3.6	Réduction de Jordan	94

4	Topologie des espaces métriques	95
4.1	Eléments de topologie générale	95
4.1.1	Espaces topologiques	95
4.1.2	La topologie de \mathbb{R}	95
4.1.3	Fermés et voisinages	96
4.1.4	Intérieur, adhérence, frontière	97
4.1.5	Topologie induite	98
4.2	Espaces métriques	99
4.2.1	Distances	99
4.2.2	Topologie définie par une distance	100
4.2.3	Points isolés, points d'accumulation	102
4.2.4	Propriété de séparation	102
4.2.5	Changement de distances	102
4.2.6	La droite numérique achevée	103
4.3	Suites	104
4.3.1	Suites convergentes, limites	104
4.3.2	Sous suites, valeurs d'adhérences	105
4.3.3	Caractérisation des fermés d'un espace métrique	106
4.4	Limites de fonctions	106
4.4.1	Notion de limite suivant une partie	106
4.4.2	Propriétés élémentaires	107
4.4.3	Composition des limites	108
4.4.4	Limites et suites	109
4.5	Continuité	109
4.5.1	Continuité en un point	109
4.5.2	Continuité sur un espace	110
4.5.3	Homéomorphismes	111
4.6	Continuité uniforme	111
4.6.1	Applications uniformément continues	111
4.6.2	Applications lipschitziennes	112
4.7	Espaces complets	112
4.7.1	Suites de Cauchy	112
4.7.2	Espaces complets	113
4.7.3	Propriétés des espaces complets	114
4.8	Espaces et parties compactes	115
4.8.1	Propriété de Bolzano-Weierstrass	115
4.8.2	Propriété de Borel Lebesgue	117
4.8.3	Compacts de \mathbb{R} et \mathbb{R}^n	119
4.9	Espaces et parties connexes	120
4.9.1	Notion de connexe	120
4.9.2	Propriétés des connexes	120
4.9.3	Connexes de \mathbb{R}	121
4.9.4	Connexité par arcs	122

5	Espaces vectoriels normés	125
5.1	Notion d'espace vectoriel normé	125
5.1.1	Norme et distance associée	125
5.1.2	Convexes, connexes	126
5.1.3	Continuité des opérations algébriques	127
5.2	Applications linéaires continues	128
5.2.1	Caractérisations et normes des applications linéaires continues	128
5.2.2	L'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F	129
5.2.3	Equivalence des normes	130
5.2.4	Caractérisation des applications bilinéaires continues	130
5.3	Espaces vectoriels normés de dimensions finies	131
5.3.1	Equivalence des normes	131
5.3.2	Propriétés topologiques et métriques des espaces vectoriels normés de dimension finie	131
5.3.3	Continuité des applications linéaires	132
5.4	Compléments : le théorème de Baire et ses conséquences	132
5.4.1	Le théorème de Baire	132
5.4.2	Les grands théorèmes	133
5.5	Compléments : convexité dans les espaces vectoriels normés	135
5.5.1	Jauge d'un convexe	135
5.5.2	Projection sur un convexe fermé	136
5.5.3	Hahn-Banach (version géométrique)	137
5.5.4	L'enveloppe convexe : Carathéodory et Krein Millman	138
6	Comparaison des fonctions	141
6.1	Relations de comparaison	141
6.1.1	Notations	141
6.1.2	Domination, prépondérance	141
6.1.3	Equivalence	142
6.1.4	Changement de variables	144
6.2	Développements limités	144
6.2.1	Notion de développement limité	144
6.2.2	Opérations sur les développements limités	145
6.2.3	Développements limités classiques	147
6.3	Développements asymptotiques	148
6.3.1	Echelles de comparaison, parties principales	148
6.3.2	Développements asymptotiques	149
6.3.3	Opérations sur les développements asymptotiques	149
7	Suites et séries	151
7.1	Convergence des suites	151
7.1.1	Monotonie (suites à termes réels)	151
7.1.2	Critère de Cauchy	152
7.1.3	Valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures	152
7.1.4	Réurrences d'ordre 1	154

7.2	Généralités sur les séries	155
7.2.1	Notion de série	155
7.2.2	Terme général, critère de Cauchy	156
7.3	Séries à termes réels positifs	157
7.3.1	Convergence des séries à termes réels positifs	157
7.3.2	Comparaison des séries à termes réels positifs	158
7.3.3	Séries de Riemann et de Bertrand	159
7.3.4	Comparaison à des intégrales	160
7.4	Séries absolument convergentes	161
7.4.1	Notion de convergence absolue	161
7.4.2	Critères de convergence absolue	162
7.4.3	Règles classiques	162
7.4.4	Règles complémentaires	164
7.4.5	Comparaison à une intégrale	164
7.5	Séries semi-convergentes	165
7.5.1	Séries alternées	165
7.5.2	Etude de séries semi-convergentes	165
7.6	Opérations sur les séries	167
7.6.1	Combinaisons linéaires	167
7.6.2	Sommation par paquets	167
7.6.3	Modification de l'ordre des termes	168
7.6.4	Produit de Cauchy	170
7.7	Séries doubles	172
7.8	Espaces de suites	174
7.9	Compléments : développements asymptotiques, analyse numérique	176
7.9.1	Calcul approché de la somme d'une série	176
7.9.2	Accélération de la convergence	177
8	Fonctions d'une variable réelle	185
8.1	Monotonie, continuité	185
8.1.1	Limites et monotonie	185
8.1.2	Continuité et monotonie	186
8.2	Dérivée	186
8.2.1	Notion de dérivée	186
8.2.2	Opérations sur les dérivées	187
8.2.3	Dérivées d'ordre supérieur	189
8.3	Fonctions réelles d'une variable réelle	190
8.3.1	Théorème de Rolle, formule des accroissements finis	190
8.3.2	Monotonie et dérivation	191
8.3.3	Difféomorphismes	192
8.3.4	Formule de Taylor Lagrange	192
8.3.5	Extensions du théorème des accroissements finis	193
8.3.6	Fonctions convexes de classe C^1	194
8.4	Fonctions vectorielles d'une variable réelle	197
8.4.1	Inégalité des accroissements finis	197
8.4.2	Applications de l'inégalité des accroissements finis	198

8.4.3	Formules de Taylor	199
8.5	Fonctions classiques	201
8.5.1	Fonctions circulaires réciproques	201
8.5.2	Fonctions hyperboliques directes	202
8.5.3	Fonctions hyperboliques réciproques	202
8.6	Analyse numérique des fonctions d'une variable	203
8.6.1	Interpolation linéaire, interpolation polynomiale	203
8.6.2	Dérivation numérique	204
8.6.3	Recherche des zéros d'une fonction	205
9	Intégration	209
9.1	Subdivisions, approximation des fonctions	209
9.1.1	Subdivisions d'un segment	209
9.1.2	Propriétés liées aux subdivisions	209
9.1.3	Approximation des fonctions	210
9.2	Intégrale des fonctions réglées sur un segment	216
9.2.1	Intégrale des applications en escalier	216
9.2.2	Intégrale des fonctions réglées	217
9.2.3	Convention de Chasles	221
9.2.4	Sommes de Riemann	221
9.2.5	Sommes de Darboux	223
9.3	Primitives et intégrales	224
9.3.1	Continuité et dérivabilité par rapport à une borne	224
9.3.2	Primitives	224
9.3.3	Changement de variable, intégration par parties	225
9.3.4	Deuxième formule de la moyenne	227
9.4	Recherches de primitives	228
9.4.1	Position du problème	228
9.4.2	Techniques usuelles	228
9.4.3	Primitives usuelles	228
9.4.4	Fractions rationnelles	229
9.4.5	Fractions rationnelles en sinus et cosinus	231
9.4.6	Fractions rationnelles en sinus et cosinus hyperboliques	233
9.4.7	Intégrales abéliennes	233
9.5	Intégration sur un intervalle quelconque : fonctions à valeurs réelles positives	236
9.5.1	Fonctions intégrables à valeurs réelles positives	236
9.5.2	Règles de comparaison	239
9.5.3	Exemples fondamentaux	241
9.6	Intégration sur un intervalle quelconque : fonctions à valeurs complexes .	242
9.6.1	Fonctions à valeurs complexes intégrables	242
9.6.2	Décomposition des fonctions à valeurs complexes	245
9.6.3	Convention et relation de Chasles	246
9.6.4	Règles de comparaison	247
9.6.5	Espaces de fonctions continues	247
9.6.6	Notion d'intégrale impropre	248
9.7	Développements asymptotiques et analyse numérique	249

9.7.1	La formule d'Euler-Mac Laurin	249
9.7.2	Calcul approché d'intégrales	252
9.7.3	La méthode de Laplace	255
9.8	Généralités sur les intégrales impropres	258
9.8.1	Notion d'intégrale impropre	258
9.8.2	Intégrales plusieurs fois impropres	259
9.8.3	Opérations sur les intégrales impropres	260
9.8.4	Intégrales et séries : intégration par paquets	261
9.9	Intégrale des fonctions réelles positives	263
9.9.1	Critère de convergence des fonctions réelles positives	263
9.9.2	Règles de comparaison	264
9.9.3	Exemples fondamentaux	266
9.10	Convergence absolue, semi-convergence	267
9.10.1	Critère de Cauchy pour les intégrales	267
9.10.2	Convergence absolue	267
9.10.3	Règles de convergence	268
9.10.4	Semi-convergence	270
10	Suites et séries de fonctions	273
10.1	Suites de fonctions	273
10.1.1	Convergence simple, convergence uniforme	273
10.1.2	Plan d'étude d'une suite de fonctions	274
10.1.3	Critère de Cauchy uniforme	276
10.1.4	Fonctions bornées, norme de la convergence uniforme	276
10.1.5	Opérations sur les fonctions	277
10.1.6	Propriétés de la convergence uniforme	278
10.1.7	Suites de fonctions intégrables sur un intervalle	281
10.2	Séries de fonctions	284
10.2.1	Différents modes de convergence	284
10.2.2	Critères supplémentaires de convergence uniforme	286
10.2.3	Propriétés de la convergence uniforme	287
10.2.4	Séries de fonctions intégrables sur un intervalle	292
10.3	Intégrales dépendant d'un paramètre	294
10.3.1	Position du problème	294
10.3.2	Continuité	294
10.3.3	Dérivabilité	296
10.3.4	Intégration	297
10.3.5	Fonctions intégrables dépendant d'un paramètre	298
10.3.6	La fonction Γ	300
10.3.7	Méthodes directes	301
11	Séries entières	303
11.1	Convergence des séries entières	303
11.1.1	Notion de série entière	303
11.1.2	Rayon de convergence	303
11.1.3	Recherche du rayon de convergence	304

11.1.4	Opérations sur les séries entières	306
11.2	Somme d'une série entière	308
11.2.1	Etude sur le disque ouvert de convergence (domaine complexe)	308
11.2.2	Etude sur le disque ouvert de convergence (domaine réel)	310
11.2.3	Etude sur le cercle de convergence	312
11.3	Développements en séries entières	313
11.3.1	Problème local, problème global	313
11.3.2	Méthodes de développement	314
11.3.3	Fonction exponentielle. Fonctions trigonométriques	317
11.3.4	Nombres complexes de module 1	321
11.3.5	Fonctions classiques	322
11.3.6	Méthodes de sommation	326
11.4	Application aux endomorphismes continus et aux matrices	327
11.4.1	Calcul fonctionnel et premières applications	327
11.4.2	Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice	328
11.4.3	Application aux systèmes différentiels homogènes à coefficients constants	330
12	Formes quadratiques	331
12.1	Formes bilinéaires	331
12.1.1	Généralités	331
12.1.2	Formes bilinéaires symétriques, antisymétriques	332
12.1.3	Matrice d'une forme bilinéaire	332
12.1.4	Changements de bases, discriminant	334
12.1.5	Orthogonalité	334
12.1.6	Formes non dégénérées	335
12.1.7	Isotropie	337
12.2	Formes quadratiques	338
12.2.1	Notion de forme quadratique	338
12.2.2	Formes quadratiques en dimension finie	339
12.2.3	Matrices et déterminants de Gram	341
12.3	Réduction des formes quadratiques en dimension finie	342
12.3.1	Familles et bases orthogonales	342
12.3.2	Décomposition en carrés. Algorithme de Gauss	344
12.4	Formes quadratiques réelles	347
12.4.1	Formes positives, négatives	347
12.4.2	Bases de Sylvester. Signature	348
12.4.3	Inégalités	349
12.4.4	Espaces préhilbertiens réels	350
12.4.5	Espaces euclidiens	352
12.4.6	Algorithme de Gram-Schmidt	352
12.4.7	Application : polynômes orthogonaux	353
12.5	Endomorphismes et formes quadratiques	356
12.5.1	Notion d'adjoint	356
12.5.2	Adjoint en dimension finie	357
12.5.3	Endomorphismes symétriques et formes quadratiques	359

12.5.4	Groupe orthogonal	359
12.5.5	Matrices orthogonales	360
12.6	Endomorphismes d'un espace euclidien	362
12.6.1	Droites et plans stables	362
12.6.2	Réduction des endomorphismes symétriques	362
12.6.3	Normes d'endomorphismes	364
12.6.4	Endomorphismes orthogonaux d'un plan euclidien	366
12.6.5	Réduction des endomorphismes orthogonaux	367
12.6.6	Produit vectoriel, produit mixte	368
12.6.7	Angles	372
13	Formes hermitiennes	375
13.1	Compléments sur la conjugaison	375
13.1.1	Applications semi-linéaires	375
13.1.2	Matrices conjuguées et transconjuguées	376
13.1.3	Matrices hermitiennes, antihermitiennes	376
13.2	Formes sesquilinéaires	377
13.2.1	Généralités	377
13.2.2	Formes sesquilinéaires hermitiennes, antihermitiennes	378
13.2.3	Matrice d'une forme sesquilinéaire	379
13.2.4	Changements de bases	380
13.2.5	Orthogonalité	380
13.2.6	Formes non dégénérées	381
13.3	Formes quadratiques hermitiennes	382
13.3.1	Notion de forme quadratique hermitienne	382
13.3.2	Formes quadratiques hermitiennes en dimension finie	384
13.3.3	Formes quadratiques hermitiennes définies positives	385
13.3.4	Espaces hermitiens	386
13.4	Endomorphismes d'un espace hermitien	386
13.4.1	Notion d'adjoint	386
13.4.2	Endomorphismes hermitiens	388
13.4.3	Groupe unitaire	389
13.4.4	Matrices unitaires	390
13.4.5	Réduction des endomorphismes normaux	391
13.4.6	Réduction des matrices normales	393
14	Séries de Fourier	395
14.1	Introduction : transformée de Fourier sur les groupes abéliens finis	395
14.1.1	Caractères des groupes abéliens finis	395
14.1.2	Transformée de Fourier sur un groupe abélien fini	397
14.2	Séries trigonométriques	398
14.2.1	Rappels d'intégration	398
14.2.2	Généralités	399
14.2.3	Un cas de convergence normale	399
14.3	Série de Fourier d'une fonction	400
14.3.1	Les espaces \mathcal{C} et \mathcal{D}	400

14.3.2	Coefficients de Fourier d'une fonction continue par morceaux . . .	401
14.3.3	Inégalité de Bessel et théorème de Riemann-Lebesgue	402
14.3.4	Les théorèmes de Dirichlet	404
14.3.5	Coefficients de Fourier des fonctions de classe C^k	407
14.3.6	Le théorème de Parseval	408
14.4	Fonctions périodiques de période T	410
14.5	Produit de convolution	412
14.5.1	Convolution de fonctions périodiques	412
14.5.2	Produit de convolution et séries de Fourier	414
15	Calcul différentiel	417
15.1	Dérivées partielles	417
15.1.1	Notion de dérivée partielle	417
15.1.2	Composition des dérivées partielles	418
15.1.3	Théorème des accroissements finis et applications	420
15.1.4	Dérivées partielles successives	421
15.1.5	Formules de Taylor	424
15.1.6	Application aux extremums de fonctions de plusieurs variables . .	428
15.2	Différentielle	431
15.2.1	Applications différentiables	431
15.2.2	Exemples d'applications différentiables	431
15.2.3	Opérations sur les différentielles	432
15.2.4	Différentielle et dérivées partielles	433
15.2.5	Matrices jacobiniennes, jacobiens	434
15.2.6	Inégalité des accroissements finis	435
15.3	Formes différentielles	436
15.3.1	Rappels sur les formes linéaires alternées	436
15.3.2	Notion de forme différentielle	436
15.3.3	Notion de gradient d'une fonction	437
15.3.4	Invariance de la différentielle	438
15.3.5	Différentielle extérieure	438
15.3.6	Théorème de Poincaré	440
15.4	Fonctions implicites et inversion locale	442
15.4.1	Position du problème des fonctions implicites	442
15.4.2	Théorème des fonctions implicites	443
15.4.3	Applications du théorème des fonctions implicites	445
15.4.4	Difféomorphismes et inversion locale	447
16	Equations différentielles	451
16.1	Notions générales	451
16.1.1	Solutions d'une équation différentielle	451
16.1.2	Type de problèmes	451
16.1.3	Réduction à l'ordre 1	452
16.1.4	Equivalence avec une équation intégrale	453
16.1.5	Le lemme de Gronwall	453
16.2	Théorie de Cauchy-Lipschitz	454

16.2.1	Unicité de solutions, solutions maximales	454
16.3	Equations différentielles linéaires d'ordre 1	456
16.3.1	Généralités	456
16.3.2	Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1	457
16.3.3	Théorie de Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires	459
16.3.4	Structure des solutions de l'équation homogène	461
16.3.5	Méthode de variation des constantes	462
16.3.6	Systèmes différentiels à coefficients constants	463
16.4	Equation différentielle linéaire d'ordre n	465
16.4.1	Généralités	465
16.4.2	Théorie de Cauchy-Lipschitz	466
16.4.3	Structure des solutions de l'équation homogène. Wronskien	466
16.4.4	Méthode de variation des constantes	468
16.4.5	Méthode d'abaissement du degré	470
16.4.6	Equation homogène à coefficients constants	471
16.4.7	Equation linéaire à coefficients constants	473
16.4.8	Equations d'Euler	475
16.5	Equations différentielles non linéaires	476
16.5.1	Théorie de Cauchy-Lipschitz	476
16.5.2	Application aux équations d'ordre n	480
16.5.3	Systèmes différentiels autonomes d'ordre 1	481
16.5.4	Equations différentielles et formes différentielles	483
16.5.5	Equations aux différentielles totales	484
16.5.6	Equations à variables séparables	485
16.5.7	Equations se ramenant à des équations à variables séparables	486
16.5.8	Equation de Riccati	487
16.6	Analyse numérique des équations différentielles	488
16.6.1	Méthode d'Euler	488
16.6.2	Méthode de Runge et Kutta	491
16.6.3	Equations différentielles d'ordre supérieur	492
17	Espaces affines	493
17.1	Généralités sur les espaces affines	493
17.1.1	Notion d'espace affine	493
17.1.2	Repères affines, bases affines	494
17.1.3	Sous-espace affine	495
17.1.4	Parallélisme, intersection	497
17.1.5	Applications affines	498
17.1.6	Utilisation de repères affines	500
17.1.7	Formes affines et sous-espaces affines	501
17.2	Barycentres	503
17.2.1	Notion de barycentres	503
17.2.2	Associativité des barycentres	504
17.2.3	Barycentres, sous-espaces affines, applications affines	506
17.2.4	Barycentres et convexité	507
17.3	Espaces affines euclidiens	509

17.3.1	Notion d'espace affine euclidien	509
17.3.2	Formule de Leibnitz et applications	509
17.3.3	Isométries affines	511
17.3.4	Forme réduite d'une isométrie affine	512
17.3.5	Distance à un sous-espace affine	514
17.3.6	Distance de deux sous-espaces affines	516
17.4	Cercles, sphères, triangle	518
17.4.1	Généralités sur les sphères	518
17.4.2	Cercles et angles	520
17.4.3	Éléments de géométrie du triangle	521
18	Courbes	525
18.1	Arcs paramétrés	525
18.1.1	Vocabulaire	525
18.1.2	Équivalence des arcs paramétrés	525
18.1.3	Orientation	526
18.1.4	Tangente à un arc paramétré	526
18.1.5	Plan osculateur, concavité	528
18.1.6	Étude locale des arcs plans	529
18.1.7	Branches infinies	532
18.1.8	Plan d'étude d'un arc plan en paramétriques	533
18.1.9	Notion de contact	535
18.1.10	Enveloppes	536
18.2	Arcs en polaires	538
18.2.1	Coordonnées polaires	538
18.2.2	Arcs en coordonnées polaires : étude locale	538
18.2.3	Branches infinies et phénomènes asymptotiques	540
18.2.4	Plan d'étude d'un arc plan en polaires	540
18.2.5	Equations polaires remarquables	542
18.3	Problèmes classiques sur les courbes	543
18.3.1	Trajectoires orthogonales	543
18.3.2	Inverse d'une courbe	544
18.3.3	Podaire d'une courbe	545
18.3.4	Conchoïdes d'une courbe	545
18.4	Étude métrique des arcs	546
18.4.1	Arcs rectifiables	546
18.4.2	Arcs de classe C^1	549
18.4.3	Abscisses curvilignes	550
18.4.4	Introduction à la méthode du repère mobile	552
18.4.5	Repère de Frénet et courbure des arcs d'un plan euclidien orienté	552
18.4.6	Centre de courbure, cercle osculateur	556
18.4.7	Développée, développantes	557
18.4.8	Equations intrinsèques	559
18.4.9	Courbure des arcs gauches	560

19 Surfaces	563
19.1 Nappes paramétrées	563
19.1.1 Notion de nappe paramétrée. Equivalence	563
19.1.2 Orientation	565
19.1.3 Plan tangent à une nappe paramétrée, vecteur normal	565
19.1.4 Points réguliers et nappes cartésiennes	566
19.1.5 Intersection de nappes paramétrées	567
19.1.6 Intersection d'une nappe et de son plan tangent	568
19.2 Nappes réglées	572
19.2.1 Notion de nappe réglée	572
19.2.2 Plan tangent à une nappe réglée	573
19.2.3 Nappes cylindriques. Nappes coniques	574
19.3 Equations de surfaces	575
19.3.1 Surfaces cartésiennes et nappes paramétrées	575
19.3.2 Cylindres	576
19.3.3 Cônes	577
19.3.4 Surfaces de révolution	578
19.4 Quadriques	579
19.4.1 Notion de quadrique	579
19.4.2 Réduction des quadriques	580
19.4.3 Classification des quadriques en dimension 2 et 3	581
19.4.4 Quadriques réglées, quadriques de révolution	583
20 Intégrales curvilignes, intégrales multiples	585
20.1 Intégrales curvilignes	585
20.1.1 Formes différentielles sur un arc paramétré	585
20.1.2 Intégrale d'une forme différentielle sur un arc	586
20.1.3 Formes différentielles exactes et champs de gradients	589
20.2 Intégrales multiples	590
20.2.1 Pavés et subdivisions. Ensembles négligeables	590
20.2.2 Intégrales multiples sur un pavé de \mathbb{R}^n	592
20.2.3 Intégrales multiples sur une partie de \mathbb{R}^n	593
20.2.4 Mesure d'un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^n	594
20.3 Calcul des intégrales doubles et triples	595
20.3.1 Théorème de Fubini sur une partie de \mathbb{R}^2	595
20.3.2 Théorème de Fubini sur une partie de \mathbb{R}^3	599
20.3.3 Théorème de changement de variables dans les intégrales multiples	600
20.3.4 Théorème de Green-Riemann	603
20.4 Introduction aux intégrales de surface	607

Chapitre 7

Suites et séries

7.1 Convergence des suites

7.1.1 Monotonie (suites à termes réels)

Théorème 7.1.1 Soit (x_n) une suite croissante de nombres réels. Alors la suite est convergente si et seulement si elle est majorée. Dans ce cas on a $\lim x_n = \sup x_n$.

Démonstration On sait déjà que toute suite convergente est bornée, donc majorée. Inversement, si la suite est majorée, soit $l = \sup x_n$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe n_0 tel que $l - \varepsilon < x_{n_0} \leq l$. Pour $n \geq n_0$, on a $l - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l$ ce qui montre que la suite converge vers l .

Remarque 7.1.1 On a un résultat analogue avec les suites décroissantes et minorées.

Corollaire 7.1.2 Soit (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels vérifiant

- (i) (a_n) est croissante et (b_n) décroissante
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$
- (iii) $\lim(b_n - a_n) = 0$

Alors les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite l qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l \leq b_n$$

On dit que deux telles suites sont adjacentes.

Démonstration On remarque que $\forall p, q, a_p \leq b_q$; en effet si $p \leq q$ on a $a_p \leq a_q \leq b_q$ et si $p > q$, on a $a_p \leq b_p \leq a_q$. La suite (a_n) est croissante majorée par b_0 , donc converge. De même la suite (b_n) converge et la propriété (iii) implique qu'elles ont la même limite.

Exemple 7.1.1 Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \log(n+1) - \log n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t} \right) dt \leq 0$. Posons $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \log n$.

On a de même $v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} (\frac{1}{n} - \frac{1}{t}) dt \geq 0$. On a donc (u_n) décroissante, (v_n) croissante, $v_n \leq u_n$, $\lim(v_n - u_n) = 0$. Donc les suites convergent. Soit γ leur limite commune (la constante d'Euler). On a donc $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \varepsilon_n$ avec $\lim \varepsilon_n = 0$.

7.1.2 Critère de Cauchy

Dans un espace métrique complet, une suite converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy. Cela peut servir aussi bien comme critère de convergence (exemple des suites $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est contractante) que comme critère de divergence.

Exemple 7.1.2 Posons $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. On a $x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. La suite ne vérifie donc pas le critère de Cauchy (bien que $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$), donc elle ne converge pas.

7.1.3 Valeurs d'adhérences, limites inférieures et supérieures

Proposition 7.1.3 Soit E un espace métrique et (x_n) une suite de E . L'ensemble de ses valeurs d'adhérences est fermé dans E .

Démonstration On a vu dans le chapitre sur les compacts que l'ensemble X des valeurs d'adhérences de la suite (x_n) est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N}$ avec $X_N = \{x_n \mid n \geq N\}$. Comme intersection de fermés, c'est un fermé. On peut aussi le redémontrer directement. Soit $x \in \overline{X}$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. Soit U ouvert tel que $x \in U \subset V$. On a $U \cap X \neq \emptyset$. Soit $y \in U \cap X$. Comme U est ouvert, U est un voisinage de la valeur d'adhérence y et donc $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$ est infini; il en est de même a fortiori de $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$, donc x est encore valeur d'adhérence de la suite.

Théorème 7.1.4 Soit E un espace métrique compact et (x_n) une suite de E .

- (i) La suite a au moins une valeur d'adhérence
- (ii) La suite converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Démonstration L'affirmation (i) n'est autre que la définition d'un compact.

(ii) La condition est évidemment nécessaire. Supposons la remplie et soit ℓ cette unique valeur d'adhérence. Supposons que ℓ n'est pas limite de la suite. Ceci signifie qu'il existe U ouvert contenant ℓ tel que $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ tel que $x_n \notin U$. On construit ainsi facilement une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\forall n, x_{\varphi(n)} \in E \setminus U$ (prendre $\varphi(n)$ le plus petit entier supérieur à $N = \varphi(n-1) + 1$ vérifiant la condition). Comme $E \setminus U$ est fermé dans un compact, c'est un compact et la suite $(x_{\varphi(n)})$ doit avoir une valeur d'adhérence $\ell' \in E \setminus U$. Mais alors la suite (x_n) a deux valeurs d'adhérences $\ell \neq \ell'$. C'est absurde.

Soit donc (x_n) une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit X l'ensemble de ses valeurs d'adhérences. C'est un fermé non vide de $\overline{\mathbb{R}}$, donc il contient sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Définition 7.1.1 Soit (x_n) une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit X l'ensemble de ses valeurs d'adhérences. On pose $\limsup x_n = \max X$ et $\liminf x_n = \min X$. La suite converge (dans $\overline{\mathbb{R}}$) si et seulement si $\limsup x_n = \liminf x_n$.

Théorème 7.1.5 Soit (x_n) une suite de $\overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On a équivalence de

- (i) $\ell = \limsup x_n$
- (ii) ℓ est valeur d'adhérence de la suite et $\forall c > \ell$, $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq c\}$ est fini.
- (iii) $\ell = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\sup_{n \geq p} x_n)$

Démonstration ((i) \Rightarrow (ii)) Soit $\ell = \limsup x_n$. Alors ℓ est valeur d'adhérence de la suite. Si $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \geq c\}$ est infini, on peut construire une sous suite dans $[c, +\infty]$ qui est compact ; cette suite doit admettre une valeur d'adhérence $\ell' \in [c, +\infty]$. On a donc $\ell' \in X$ avec $\ell' > \sup X$. C'est absurde.

((ii) \Rightarrow (iii)) Remarquons que la suite $y_p = \sup_{n \geq p} x_n$ est décroissante, donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit ℓ' sa limite. Soit $c > \ell$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n < c$. Donc pour $n \geq N$, on a $y_n \leq c$ et donc $\ell' \leq c$. Comme c est quelconque ($> \ell$), on a $\ell' \leq \ell$. Mais d'autre part on sait que ℓ est valeur d'adhérence de la suite (x_n) d'où $\ell = \lim x_{\varphi(n)} \leq \lim y_{\varphi(n)} = \ell'$. Donc $\ell = \ell'$.

((iii) \Rightarrow (i)) Posons toujours $y_p = \sup_{n \geq p} x_n$. Si ℓ' est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) , on a $\ell' = \lim x_{\varphi(n)} \leq \lim y_{\varphi(n)} = \ell$, donc $\limsup x_n \leq \ell$. Mais d'autre part, soit U un ouvert contenant ℓ , on peut trouver un N tel que $p \geq N \Rightarrow y_p \in U$. Pour un tel p , comme $U \in V(y_p)$, on peut trouver un $n \geq p$ tel que $x_n \in U$. Ceci montre que ℓ est valeur d'adhérence de la suite (x_n) soit $\ell \leq \limsup x_n$ et donc l'égalité.

Proposition 7.1.6

- (i) $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$ (avec égalité si l'une des suites est convergente)
- (ii) si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives, $\limsup(u_n v_n) \leq \limsup u_n \limsup v_n$ (avec égalité si l'une des suites est convergente)
- (iii) si $\lambda > 0$, $\limsup(\lambda x_n) = \lambda \limsup x_n$
- (iv) si f est continue, $f(\limsup x_n) \leq \limsup f(x_n)$ (avec égalité si f est croissante)

Démonstration (i) On pose $\ell = \limsup u_n$, $v = \limsup v_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow u_n < \ell + \varepsilon$. De même, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N' \Rightarrow v_n < v + \varepsilon$. Alors $n \geq \max(N, N') \Rightarrow u_n + v_n < \ell + v + 2\varepsilon$, ce qui montre que $\limsup(u_n + v_n) \leq \ell + v$. Si la suite u_n converge, on a par exemple $\ell' = \lim v_{\varphi(n)}$, d'où $\ell + \ell' = \lim(u_{\varphi(n)} + v_{\varphi(n)})$ est encore valeur d'adhérence de la suite $(u_n + v_n)$; donc $\limsup(u_n + v_n) = \ell + \ell'$. La démonstration de (ii) est tout à fait similaire.

(iii) est tout à fait élémentaire.

(iv) soit $\ell = \limsup x_n$. On a $\ell = \lim x_{\varphi(n)}$, donc $f(\ell) = \lim f(x_{\varphi(n)})$ est valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))$. On en déduit que $f(\ell) \leq \limsup f(x_n)$. Supposons maintenant f croissante et supposons que $f(\ell) < \limsup f(x_n) = \ell'$. Soit α tel que $f(\ell) < \alpha < \ell'$. Le réel ℓ' est valeur d'adhérence de la suite $f(x_n)$, donc on peut trouver N tel que $f(x_N) > \alpha (> f(\ell))$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe a

tel que $\alpha = f(a)$. Comme f est croissante, on a $a > \ell$. On a $\ell = \lim f(x_{\varphi(n)})$ donc il existe N' tel que $n \geq N' \Rightarrow f(x_{\varphi(n)}) > \alpha = f(a)$. Mais alors $n \geq N' \Rightarrow x_{\varphi(n)} > a > \ell$. Ceci contredit le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de n tels que $x_n > a$. On a donc $f(\ell) = \ell'$.

Remarque 7.1.2 L'exemple $u_n = (-1)^n$, $v_n = -u_n$ montre que l'on n'a pas généralement d'égalité dans (i). En ce qui concerne (iii), si $\lambda < 0$ on a évidemment $\limsup(\lambda x_n) = \lambda \liminf x_n$. De même pour (iv), si f est décroissante, on a $f(\limsup x_n) = \liminf f(x_n)$, ce qui montre qu'en général on n'a pas d'égalité dans (iv).

Les résultats concernant la limite inférieure sont tout à fait similaires, les inégalités changeant de sens

Exemple 7.1.3 Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continue croissante ; on suppose que l'équation $f(x) = \frac{x}{2}$ a une unique solution ℓ , que $x < \ell \Rightarrow f(x) > \frac{x}{2}$ et $x > \ell \Rightarrow f(x) < \frac{x}{2}$; on considère la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n) + f(x_{n-1})$. On vérifie facilement que si $a = \min(\ell, x_0, x_1)$, $b = \max(\ell, x_0, x_1)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a, b]$. Posons $M = \limsup x_n$ et $m = \liminf x_n$. On a alors $M = \limsup(f(x_{n-1}) + f(x_{n-2})) \leq \limsup f(x_{n-1}) + \limsup f(x_{n-2}) = 2f(M)$. On en déduit que $M \leq \ell$. On montre de même que $m \geq \ell$ d'où $m = M = \ell$ et la suite converge.

7.1.4 Récurrences d'ordre 1

Soit D une partie de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère $x_0 \in D$ et la suite (x_n) définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$. On note $D' = \{x_0 \in D \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est définie}\}$ (on montre facilement que $D' = \bigcup_{A \subset D, f(A) \subset A} A$). On remarque immédiatement que D contient tous les points fixes de f .

Proposition 7.1.7 Si la suite (x_n) converge vers un point $\ell \in D$, alors $f(\ell) = \ell$.

Démonstration On a alors $\ell = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\ell)$ par continuité de f au point ℓ .

Proposition 7.1.8 Soit $\ell \in D^o$ tel que $f(\ell) = \ell$ et supposons f dérivable au point ℓ .

- (i) Si $|f'(\ell)| < 1$ (point fixe attractif), il existe un $\eta > 0$ tel que
 - (a) $f(] \ell - \eta, \ell + \eta[) \subset] \ell - \eta, \ell + \eta[\subset D'$
 - (b) $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, x_{n_0} \in] \ell - \eta, \ell + \eta[) \Rightarrow \lim x_n = \ell$
- (ii) Si $|f'(\ell)| > 1$ (point fixe répulsif) et si $\lim x_n = \ell$, alors la suite est stationnaire en ℓ .

Démonstration (i) Soit k tel que $|f'(\ell)| < k < 1$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow \ell, x \neq \ell} \left| \frac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell} \right| = \lim_{x \rightarrow \ell, x \neq \ell} \left| \frac{f(x) - \ell}{x - \ell} \right| = |f'(\ell)| < k$$

il existe $\eta > 0$ tel que $|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq k|x - \ell|$. On a alors évidemment $f(] \ell - \eta, \ell + \eta[) \subset] \ell - \eta, \ell + \eta[\subset D'$. Soit n_0 tel que $x_{n_0} \in] \ell - \eta, \ell + \eta[$. Alors pour tout

$n \geq n_0$ on a $x_n \in]\ell - \eta, \ell + \eta[$ et $|x_{n+1} - \ell| \leq k|x_n - \ell|$. On a alors $|x_n - \ell| \leq k^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell|$ ce qui montre que $\lim x_n = \ell$.

(ii) Une méthode similaire montre que si $|f'(\ell)| > k > 1$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $|x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \geq k|x - \ell|$. Si $\lim x_n = \ell$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \ell| < \eta$. On a alors $|x_{n+1} - \ell| \geq k|x_n - \ell|$, soit encore $|x_n - \ell| \geq k^{n-n_0}|x_{n_0} - \ell|$ avec $k > 1$. Ce n'est compatible avec le fait que $x_n - \ell$ tend vers 0 que si $x_{n_0} - \ell = 0$, et la suite est alors stationnaire.

Les deux propositions précédentes permettent de conclure dans un certain nombre de cas. Une étude plus fine relève en général de propriétés de monotonie de la fonction f .

Proposition 7.1.9 *Soit I un intervalle stable par f sur lequel f est monotone. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in I$. Alors $\forall n \geq n_0, x_n \in I$ et de plus*

- (i) *si f est croissante sur I , la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ est monotone (le sens étant déterminé par le signe de $x_{n_0+1} - x_{n_0} = f(x_{n_0}) - x_{n_0}$)*
- (ii) *si f est décroissante sur I , les deux sous suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de sens contraire à partir de l'indice n_0 .*

Démonstration Supposons f croissante et par exemple $f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$, alors $x_n \leq x_{n-1} \Rightarrow f(x_n) \leq f(x_{n-1}) \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$ ce qui montre par récurrence que $\forall n \geq n_0, x_{n+1} \leq x_n$ et la suite est décroissante à partir de n_0 . De même, si $f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} \geq x_{n_0}$, la suite est croissante à partir de n_0 . Supposons maintenant f décroissante sur I et $f(I) \subset I$. Alors $f \circ f$ est croissante sur I et donc les deux sous suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones, car elles vérifient la relation $y_{n+1} = f \circ f(y_n)$. De plus elles sont de sens contraire car $x_{2n+3} - x_{2n+1} = f(x_{2n+2}) - f(x_{2n})$ et f est décroissante.

Remarque 7.1.3 Supposons que l'on est dans la situation de la proposition avec f croissante; soit $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$. On constate immédiatement que le signe de $\ell - x_n = f(\ell) - f(x_{n-1})$ est constant, si bien que ℓ fournit soit un majorant, soit un minorant de la suite.

7.2 Généralités sur les séries

7.2.1 Notion de série

Définition 7.2.1 *Soit E un espace vectoriel normé et (x_n) une suite de E . On appelle sommes partielles de la série $\sum x_n$ les $S_n = \sum_{p=0}^n x_p$ (notée $S_n(x)$ s'il y a risque de confusion). On dit que la série converge si la suite des sommes partielles converge dans E ; sa limite est alors appelée la somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^n x_p$. Une série non convergente est dite divergente.*

Remarque 7.2.1 Soit (a_n) une suite de E . Définissons une suite (x_n) par $x_0 = a_0$ et pour $n \geq 1$, $x_n = a_n - a_{n-1}$. On a immédiatement $S_n(x) = a_n$ et donc la série $\sum x_n$ converge si et seulement si la suite (a_n) converge ; dans ce cas on a d'ailleurs $\lim a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Ceci peut permettre dans certains cas de ramener une étude de convergence de suite à une étude de convergence de série.

Proposition 7.2.1 Soit E un espace vectoriel normé, $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries d'éléments de E . On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow x_n = y_n$ (autrement dit les deux suites ne diffèrent que par un nombre fini de termes). Alors les deux séries sont de même nature (simultanément convergentes ou divergentes).

Démonstration Pour $n \geq N$, on a $S_n(x) = S_n(y) + (S_N(x) - S_N(y))$ donc l'une des suites S_n converge si et seulement si l'autre converge.

Remarque 7.2.2 En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S(x) = S(y) + (S_N(x) - S_N(y))$.

Définition 7.2.2 Soit E un espace vectoriel normé, $\sum x_n$ une série convergente et $p \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum_{n \geq p+1} x_n$ est convergente ; sa somme est notée R_p (ou $R_p(x)$). On a par définition $S_n + R_n = \sum_{p=0}^{+\infty} x_p$ et $\lim R_n = 0$.

Proposition 7.2.2 Soit E un espace vectoriel normé. Alors l'ensemble des suites (x_n) telles que la série $\sum x_n$ converge est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$. L'application $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est linéaire de ce sous-espace vectoriel dans E .

Démonstration Il suffit de remarquer que si α et β sont des scalaires, $S_n(\alpha x + \beta y) = \alpha S_n(x) + \beta S_n(y)$.

7.2.2 Terme général, critère de Cauchy

Théorème 7.2.3 Si la série $\sum x_n$ converge, alors la suite (x_n) admet 0 pour limite.

Démonstration $x_n = S_n - S_{n-1}$ et les deux suites ont la même limite $S = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Théorème 7.2.4 (*critère de Cauchy pour les séries*). Soit E un espace vectoriel normé complet et $\sum x_n$ une série à termes de E . La série $\sum x_n$ converge si et seulement si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, q \geq p \geq N \Rightarrow \left\| \sum_{n=p}^q x_n \right\| < \varepsilon$$

Démonstration C'est simplement le critère de Cauchy pour la suite (S_n) des sommes partielles puisque $\sum_{n=p}^q x_n = S_q - S_{p-1}$.

Exemple 7.2.1 La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge puisque $\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. La série ne vérifie donc pas le critère de Cauchy (bien que $\lim \frac{1}{n} = 0$), donc elle diverge.

7.3 Séries à termes réels positifs

7.3.1 Convergence des séries à termes réels positifs

Théorème 7.3.1 Soit $\sum x_n$ une série à termes réels positifs. Alors la suite des sommes partielles est une suite croissante; la série converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq M$.

Démonstration On a $S_n - S_{n-1} = x_n \geq 0$ donc la suite (S_n) est croissante; par suite, elle converge si et seulement si elle est majorée.

Remarque 7.3.1 Si une série à termes positifs diverge, on a donc nécessairement $\lim S_n = +\infty$ (puisque la suite (S_n) est croissante).

Corollaire 7.3.2 Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels telles que $0 \leq x_n \leq y_n$. Alors

- (i) si la série $\sum y_n$ converge, la série $\sum x_n$ converge également
- (ii) si la série $\sum x_n$ diverge, la série $\sum y_n$ diverge

Démonstration On a $S_n(x) \leq S_n(y)$ donc tout majorant de la suite $(S_n(y))$ est aussi un majorant de la suite $(S_n(x))$, d'où (i). L'énoncé (ii) n'en est que la contraposée.

Remarque 7.3.2 Pour que l'énoncé précédent soit valable, il suffit évidemment qu'il existe $k > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n \leq ky_n$, c'est-à-dire que $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ et $x_n = O(y_n)$.

7.3.2 Comparaison des séries à termes réels positifs

Théorème 7.3.3 Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels positifs telles que $x_n = O(y_n)$ (resp. $x_n = o(y_n)$). Alors

- (i) si la série $\sum y_n$ converge, la série $\sum x_n$ converge également et $R_n(x) = O(R_n(y))$ (resp. $R_n(x) = o(R_n(y))$)
- (ii) si la série $\sum x_n$ diverge, la série $\sum y_n$ diverge et $S_n(x) = O(S_n(y))$ (resp. $S_n(x) = o(S_n(y))$)

Démonstration Les convergences et divergences résultent immédiatement de la remarque qui suit le corollaire précédent et du fait que $x_n = o(y_n) \Rightarrow x_n = O(y_n)$. Montrons par exemple les énoncés sur les relations de comparaison dans le cas $x_n = o(y_n)$ (des modifications évidentes de ε en k ou $2k$ permettent de traiter le cas $x_n = O(y_n)$).

(i) Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n \leq \varepsilon y_n$. Alors pour $n \geq N$, on a $0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} x_p \leq \varepsilon \sum_{p=n+1}^{+\infty} y_p$, soit $0 \leq R_n(x) \leq \varepsilon R_n(y)$. On a donc $R_n(x) = o(R_n(y))$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow 0 \leq x_n \leq \frac{\varepsilon}{2} y_n$. Alors pour $n > N$, on a $0 \leq \sum_{p=N+1}^n x_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=N+1}^n y_p$, soit $S_n(x) - S_N(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} (S_n(y) - S_N(y))$

ou encore $0 \leq S_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) + (S_N(x) - \frac{\varepsilon}{2} S_N(y))$. Mais comme la série $\sum y_n$ est à termes positifs divergente, ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ et donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N' \Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) \geq S_N(x) - \frac{\varepsilon}{2} S_N(y)$. Alors pour $n > \max(N, N')$, on a $0 \leq S_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) + \frac{\varepsilon}{2} S_n(y) = \varepsilon S_n(y)$ et donc $S_n(x) = o(S_n(y))$.

Corollaire 7.3.4 Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels strictement positifs telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Alors $x_n = O(y_n)$ et en particulier

- (i) si la série $\sum y_n$ converge, la série $\sum x_n$ converge
- (ii) si la série $\sum x_n$ diverge, la série $\sum y_n$ diverge

Démonstration On vérifie immédiatement par récurrence que pour $n \geq N$ on a $x_n \leq \frac{x_N}{y_N} y_n$ et donc $x_n = O(y_n)$.

Théorème 7.3.5 Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels telles que $y_n \geq 0$ et $x_n \sim y_n$. Alors les deux séries sont de même nature et

- (i) si la série $\sum y_n$ converge, la série $\sum x_n$ converge également et $R_n(x) \sim R_n(y)$
- (ii) si la série $\sum y_n$ diverge, la série $\sum x_n$ diverge et $S_n(x) \sim S_n(y)$

Démonstration Soit $\varepsilon < 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon)y_n \leq x_n \leq (1+\varepsilon)y_n$ et donc $x_n \geq 0$ pour $n \geq N$. On a à la fois $x_n = O(y_n)$ et $y_n = O(x_n)$ ce qui d'après le théorème précédent montre que les deux séries convergent ou divergent simultanément. Supposons alors les séries convergentes. On a $|x_n - y_n| = o(y_n)$, on en déduit donc la convergence de $\sum |x_n - y_n|$ et que $R_n(|x - y|) = o(R_n(y))$. Mais $|R_n(x) - R_n(y)| \leq R_n(|x - y|)$ donc $|R_n(x) - R_n(y)| = o(R_n(y))$ et donc $R_n(x) \sim R_n(y)$. Supposons maintenant les séries divergentes. Alors, soit la série $\sum |x_n - y_n|$ converge et comme $\lim S_n(y) = +\infty$ on a $S_n(|x - y|) = o(S_n(y))$, soit elle diverge et le théorème précédent assure que $S_n(|x - y|) = o(S_n(y))$. Mais alors $|S_n(x) - S_n(y)| \leq S_n(|x - y|) = o(S_n(y))$, soit $S_n(x) \sim S_n(y)$.

7.3.3 Séries de Riemann et de Bertrand

Théorème 7.3.6 (séries de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si $\alpha > 1$, on a $R_n \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$; si $\alpha < 1$, on a $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$; si $\alpha = 1$, $S_n \sim \log n$.

Démonstration Soit $\alpha \neq 1$. Posons $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$ et $y_n = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$. On a

$$\frac{y_n}{x_n} = -\frac{(1 + \frac{1}{n})^{1-\alpha} - 1}{\frac{1}{n}}$$

qui admet pour limite l'opposé de la dérivée en 0 de $x \mapsto (1+x)^{1-\alpha}$ soit $\alpha - 1$. On a donc $x_n \sim \frac{1}{\alpha - 1} y_n > 0$. Les deux séries sont donc de même nature. Or $S_n(y) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ admet une limite finie si et seulement si $\alpha > 1$. Si $\alpha > 1$, on a $R_n(x) \sim \frac{1}{\alpha - 1} R_n(y) = \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Si $\alpha < 1$, on a $S_n(x) \sim \frac{1}{\alpha - 1} S_n(y) = \frac{1}{1 - \alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 1) \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1 - \alpha}$. Enfin, si $\alpha = 1$, on aboutit à une étude similaire avec $y_n = \log(n+1) - \log n = \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

Corollaire 7.3.7 (séries de Bertrand). Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$.

Démonstration Soit $x_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$. Si $\alpha > 1$, soit γ tel que $\alpha > \gamma > 1$ et $y_n = \frac{1}{n^\gamma}$. La série $\sum y_n$ converge et $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\log n)^\beta}$ tend vers 0 car $\alpha - \gamma > 0$. On a donc $x_n = o(y_n)$ et la série $\sum x_n$ converge. Si $\alpha < 1$, soit γ tel que $\alpha < \gamma < 1$ et $y_n = \frac{1}{n^\gamma}$. La

série $\sum y_n$ diverge et $\frac{y_n}{x_n} = \frac{(\log n)^\beta}{n^{\gamma-\alpha}}$ tend vers 0 car $\gamma - \alpha > 0$. On a donc $y_n = o(x_n)$ et la série $\sum x_n$ converge. Le cas $\alpha = 1$ résulte facilement du paragraphe suivant.

7.3.4 Comparaison à des intégrales

Théorème 7.3.8 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante, positive.

Posons $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$. Alors la série $\sum w_n$ est convergente.

Démonstration On a $w_n = \int_{n-1}^n (f(t) - f(n)) dt$. Comme f est décroissante, $\forall t \in [n-1, n]$, $f(t) \geq f(n)$ et donc $w_n \geq 0$. Mais d'autre part

$$0 \leq w_n \leq \int_{n-1}^n f(n-1) dt - f(n) = f(n-1) - f(n)$$

On a $\sum_{p=1}^n (f(p-1) - f(p)) = f(0) - f(n)$ qui admet une limite quand p tend vers $+\infty$ (car f admet une limite en $+\infty$: elle est décroissante et positive). Ceci montre que la série $\sum (f(p-1) - f(p))$ converge. Il en est donc de même de la série $\sum w_n$.

Corollaire 7.3.9 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue décroissante positive. Alors la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Démonstration En effet, on déduit du théorème précédent que les deux séries $\sum f(n)$ et $\sum \int_{n-1}^n f(t) dt$ convergent ou divergent simultanément, car leur différence est une série convergente. Mais on a $\sum_{p=1}^n \int_{p-1}^p f(t) dt = \int_0^n f(t) dt = \int_{[0,n]} f$. Si f est intégrable, comme la suite $([0, n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de segments dont la réunion est $[0, +\infty[$, la suite $(\int_{[0,n]} f)$ est convergente de limite $\int_{[0,+\infty[} f$, donc la série $\sum \int_{n-1}^n f(t) dt$ converge et il en est de même de $\sum f(n)$. Si $\sum f(n)$ converge, il en est de même de $\sum \int_{n-1}^n f(t) dt$, et si $[a, b]$ est un segment contenu dans $[0, +\infty[$ les majorations

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_0^{[b]+1} f = \sum_{p=0}^{[b]+1} \int_{p-1}^p f(t) dt \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \int_{p-1}^p f(t) dt$$

et le fait que f soit positive, montrent que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Remarque 7.3.3 Bien entendu, il suffit que la condition de décroissance soit vérifiée sur un certain $[t_0, +\infty[$.

Dans le cas d'une série divergente, l'encadrement

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{p=0}^n f(p) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$$

permet souvent d'obtenir un équivalent de la somme partielle de la série. Dans le cas d'une série convergente, on a de même

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} f(p) \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

ce qui permet souvent d'obtenir une majoration ou un équivalent du reste de la série.

Exemple 7.3.1 Dans le cas limite des séries de Bertrand, $\sum \frac{1}{n(\log n)^\beta}$, la fonction

$f(t) = \frac{1}{t(\log t)^\beta}$ est continue décroissante (pour t assez grand) de limite 0. Donc la série

est de même nature que l'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t(\log t)^\beta}$. Mais on a $\int_3^x \frac{dt}{t(\log t)^\beta} = \int_{\log 3}^{\log x} \frac{du}{u^\beta}$ (poser $u = \log t$) qui admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$. Ceci achève la démonstration du critère de convergence des séries de Bertrand.

7.4 Séries absolument convergentes

7.4.1 Notion de convergence absolue

Définition 7.4.1 Soit E un espace vectoriel normé. On dit que la série $\sum x_n$ est absolument convergente si la série à termes réels positifs $\sum \|x_n\|$ converge.

Théorème 7.4.1 Soit E un espace vectoriel normé complet. Alors toute série absolument convergente à terme général dans E est convergente.

Démonstration On a $\left\| \sum_{n=p}^q x_n \right\| \leq \sum_{n=p}^q \|x_n\|$. Si la série $\sum \|x_n\|$ converge, elle vérifie

le critère de Cauchy, il en est donc de même de la série $\sum x_n$ et donc celle-ci converge.

Remarque 7.4.1 L'avantage est bien entendu de ramener l'étude à celle d'une série à termes réels positifs.

7.4.2 Critères de convergence absolue

Théorème 7.4.2 Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries telles que $x_n = O(y_n)$ et $\sum y_n$ est absolument convergente. Alors $\sum x_n$ converge absolument.

Démonstration On a $x_n = O(y_n) \iff \|x_n\| = O(\|y_n\|)$ et il suffit d'appliquer le théorème de comparaison pour les séries à termes réels positifs.

Remarque 7.4.2 Le théorème ci-dessus reste valable même si les termes généraux x_n et y_n ne sont pas dans le même espace vectoriel normé. En particulier, la série étalon $\sum y_n$ sera le plus souvent une série à termes réels positifs.

En ce qui concerne les équivalents, on a un résultat plus fort

Théorème 7.4.3 Soit $\sum x_n$ une série à terme général dans l'espace vectoriel normé E et $\sum y_n$ une série à termes réels positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in E \setminus \{0\}$ tel que $x_n \sim \ell y_n$. Alors les deux séries sont simultanément convergentes ou divergentes.

Démonstration Si $\sum y_n$ converge, on a $x_n = O(y_n)$ et $y_n \geq 0$, donc la série $\sum x_n$ est absolument convergente. Inversement, supposons que la série $\sum x_n$ converge. Puisque $x_n - \ell y_n = o(\ell y_n)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \|x_n - \ell y_n\| \leq \frac{1}{2} \|\ell y_n\| = \frac{1}{2} \|\ell\| y_n$. En sommant on obtient $\left\| \sum_{n=p}^q x_n - \ell \sum_{n=p}^q y_n \right\| \leq \frac{1}{2} \|\ell\| \sum_{n=p}^q y_n$. On en déduit

$$\begin{aligned} \|\ell\| \sum_{n=p}^q y_n &= \left\| \ell \sum_{n=p}^q y_n \right\| \leq \left\| \ell \sum_{n=p}^q y_n - \sum_{n=p}^q x_n \right\| + \left\| \sum_{n=p}^q x_n \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\ell\| \sum_{n=p}^q y_n + \left\| \sum_{n=p}^q x_n \right\| \end{aligned}$$

d'où en définitive $\sum_{n=p}^q y_n \leq \frac{2}{\|\ell\|} \left\| \sum_{n=p}^q x_n \right\|$. La série $\sum x_n$ converge, donc vérifie le critère de Cauchy. Il en est donc de même de la série $\sum y_n$, qui est par suite convergente.

7.4.3 Règles classiques

Il suffit maintenant d'appliquer ces résultats à des séries étalons, comme les séries de Riemann ou les séries géométriques.

Lemme 7.4.4 Soit a un nombre complexe. La série $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

Démonstration La condition est évidemment nécessaire puisque le terme général doit tendre vers 0. Supposons la vérifiée. On a $\sum_{p=0}^n a^p = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ qui admet la limite $\frac{1}{1-a}$. Donc la série converge.

Théorème 7.4.5 (règle de d'Alembert). Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit $\sum x_n$ une série à termes dans E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et telle que la suite $(\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|})$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

- (i) si $\ell < 1$, la série converge absolument
- (ii) si $\ell > 1$, la série diverge

Démonstration (i) Si $\ell < 1$, soit ρ tel que $\ell < \rho < 1$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq \rho$ soit $\|x_{n+1}\| \leq \rho\|x_n\|$. On a donc alors par récurrence $\|x_n\| \leq \rho^{n-N}\|x_N\| = O(\rho^n)$. Comme la série $\sum \rho^n$ converge, la série $\sum x_n$ converge absolument.

(ii) Si $\ell > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} > 1$ soit $\|x_{n+1}\| > \|x_n\|$. On a donc alors par récurrence $\|x_n\| > \|x_N\|$. La suite (x_n) ne peut donc pas avoir 0 pour limite et la série diverge.

Remarque 7.4.3 Si $\ell = 1$ on ne peut rien conclure comme le montre l'exemple des séries de Riemann. Lorsque la règle de d'Alembert s'applique, elle conduit à des convergences rapides (de type exponentielle) ou des divergences grossières (le terme général ne tend pas vers 0).

Théorème 7.4.6 (règle de Riemann). Soit E un espace vectoriel normé. Soit $\sum x_n$ une série à termes dans E .

- (i) S'il existe $\alpha > 1$ tel que $x_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$, alors la série converge absolument
- (ii) S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\ell \in E \setminus \{0\}$ tels que $x_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$ alors la série converge absolument si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.
- (iii) Si $E = \mathbb{R}$ et $x_n \geq 0$, et s'il existe $\alpha \leq 1$ et $\ell > 0$ (y compris $+\infty$) tel que $\lim n^\alpha x_n = \ell$, alors la série diverge.

Démonstration (i) et (ii) résultent de ce qui précède. Pour (iii), il suffit de remarquer que les hypothèses impliquent que $\frac{1}{n^\alpha} = O(x_n)$. Comme $\alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc aussi la série $\sum x_n$.

7.4.4 Règles complémentaires

Théorème 7.4.7 (règle de Cauchy). Soit E un espace vectoriel normé complet. Soit $\sum x_n$ une série à termes dans E telle que la suite $(\sqrt[n]{\|x_n\|})$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

- (i) si $\ell < 1$, la série converge absolument
- (ii) si $\ell > 1$, la série diverge

Démonstration (i) Si $\ell < 1$, soit ρ tel que $\ell < \rho < 1$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{\|x_n\|} \leq \rho$ soit $\|x_n\| \leq \rho^n$. Comme la série $\sum \rho^n$ converge, la série $\sum x_n$ converge absolument.

(ii) Si $\ell > 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{\|x_n\|} > 1$ soit $\|x_n\| > 1$. La suite (x_n) ne peut donc pas avoir 0 pour limite et la série diverge.

Théorème 7.4.8 (règle de Duhamel). Soit $\sum x_n$ une série à termes dans \mathbb{R}^+ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq 0$ et telle que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$. Alors

- (i) si $\lambda > 1$, la série converge
- (ii) si $\lambda < 1$, la série diverge

Démonstration Posons $y_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$. On en déduit que si $\alpha \neq \lambda$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} - \frac{y_{n+1}}{y_n} \sim \frac{\alpha - \lambda}{n}$ est pour n assez grand du signe de $\alpha - \lambda$. Si $\lambda < 1$, soit α tel que $\lambda < \alpha < 1$. On a donc pour $n \geq N$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ et comme la série $\sum y_n$ diverge (car $\alpha < 1$), la série $\sum x_n$ diverge. Si $\lambda > 1$, soit α tel que $\lambda > \alpha > 1$. On a donc pour $n \geq N$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}$ et comme la série $\sum y_n$ converge (car $\alpha > 1$), la série $\sum x_n$ converge.

7.4.5 Comparaison à une intégrale

Théorème 7.4.9 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que f' soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Posons $w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$. Alors la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

Démonstration On a par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n (t - n + 1) f'(t) dt &= [(t - n + 1) f(t)]_{n-1}^n - \int_{n-1}^n f(t) dt \\ &= -w_n \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^n (t - n + 1) |f'(t)| dt \leq \int_{n-1}^n |f'(t)| dt$$

et donc

$$\sum_{p=1}^n |w_p| \leq \int_0^n |f'(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |f'(t)| dt$$

ce qui montre la convergence de la série à termes positifs $\sum |w_n|$ et donc la convergence absolue de la série.

Corollaire 7.4.10 *Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que f et f' soient intégrables sur $[0, +\infty[$. Alors la série $\sum f(n)$ est absolument convergente.*

Démonstration En effet la série $\sum \int_{n-1}^n |f(t)| dt$ est convergente car

$$\sum_{p=1}^n \int_{n-1}^n |f(t)| dt = \int_0^n |f(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$$

et comme $\left| \int_{n-1}^n f(t) dt \right| \leq \int_{n-1}^n |f(t)| dt$, la série $\sum \int_{n-1}^n f(t) dt$ est absolument convergente. Comme $\sum w_n$ est également absolument convergente, il en est de même de la série $\sum f(n)$.

7.5 Séries semi-convergentes

7.5.1 Séries alternées

Théorème 7.5.1 *(convergence des séries alternées). Soit (a_n) une suite de nombres réels, décroissante, de limite 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge; le reste d'ordre n est du signe de son premier terme (c'est-à-dire $(-1)^{n+1}$) et sa valeur absolue est majorée par la valeur absolue de ce premier terme (c'est-à-dire a_{n+1}).*

Démonstration On a $S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ et $S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$. La suite (S_{2n}) est donc décroissante, la suite S_{2n+1} est croissante; comme $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ est positif et tend vers 0, ces deux suites forment un couple de suites adjacentes; elles admettent donc une limite commune S qui est limite de la suite S_n . On a pour tout n , $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$. Ceci nous montre que $0 \leq -R_{2n} = S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$ et que $0 \leq R_{2n-1} = S - S_{2n-1} \leq S_{2n} - S_{2n-1} = a_{2n}$ d'où les assertions sur le reste.

7.5.2 Etude de séries semi-convergentes

Les théorèmes de comparaison ne s'appliquent pas aux séries quelconques. Ainsi on a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ alors que la première est convergente et la deuxième divergente

(somme d'une série convergente et d'une série divergente). Pour une série à termes réels, on peut envisager le plan suivant

(i) regarder si le critère de convergence des séries alternées s'applique ($a_n = (-1)^n |a_n|$) avec $|a_n|$ **décroissant** de limite 0).

(ii) si $a_n = (-1)^n |a_n|$ mais si on ne peut pas appliquer le critère de convergence des séries alternées, on peut essayer de trouver une série alternée $\sum b_n$ qui relève de ce critère telle que $a_n \sim b_n$; alors, comme la série $\sum b_n$ converge, la nature de la série $\sum a_n$ sera la même que celle de la série $\sum (a_n - b_n)$, avec $a_n - b_n = o(a_n)$; on essaiera de poursuivre le processus jusqu'à tomber soit sur une série divergente, soit sur une série absolument convergente

(iii) si a_n n'est pas alterné en signes, on peut utiliser une sommation par paquets (cf plus loin) : en regroupant les termes consécutifs de même signe, on aboutira à une série alternée en signe à laquelle on pourra appliquer l'une des méthodes précédentes

Enfin, pour une série à termes non réels ou qui ne relève pas d'une des méthodes précédentes, on pourra utiliser un théorème d'Abel comme le suivant

Théorème 7.5.2 Soit (a_n) une suite de nombres réels et (x_n) une suite de l'espace vectoriel normé complet E telles que

$$- (i) \exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{p=0}^n x_p \right\| \leq M$$

- (ii) la suite (a_n) tend vers 0 en **décroissant**.

Alors la série $\sum a_n x_n$ converge.

Démonstration On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q a_n x_n &= \sum_{n=p}^q a_n (S_n(x) - S_{n-1}(x)) \\ &= \sum_{n=p}^q a_n S_n(x) - \sum_{n=p}^q a_n S_{n-1}(x) \\ &= \sum_{n=p}^q a_n S_n(x) - \sum_{n=p-1}^{q-1} a_{n+1} S_n(x) \\ &\quad (\text{changement d'indices } n-1 \mapsto n) \\ &= a_q S_q(x) - a_p S_{p-1}(x) + \sum_{n=p}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) S_n(x) \end{aligned}$$

On a effectué ici une transformation dite *transformation d'Abel*.

Comme $\forall n, \|S_n(x)\| \leq M$ on a

$$\left\| \sum_{n=p}^q a_n x_n \right\| \leq M(|a_q| + |a_p|) + \sum_{n=p}^{q-1} |a_n - a_{n+1}| = 2Ma_p$$

en tenant compte de $a_n \geq 0$ et $a_n - a_{n+1} \geq 0$. Comme $\lim a_p = 0$, la série $\sum a_n x_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc elle converge.

7.6 Opérations sur les séries

7.6.1 Combinaisons linéaires

Proposition 7.6.1 *Soit E un espace vectoriel normé, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes dans E , α et β deux scalaires. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes (resp. absolument convergentes), il en est de même de la série $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ et alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Démonstration Le résultat a déjà été vu pour la convergence; pour la convergence absolue, il résulte de $\|\alpha a_n + \beta b_n\| \leq |\alpha| \|a_n\| + |\beta| \|b_n\|$

Corollaire 7.6.2 *Soit (z_n) une suite de nombres complexes, $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum z_n$ est convergente (resp. absolument convergente) si et seulement si les deux séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ le sont.*

Démonstration Le sens direct résulte de $x_n = \frac{1}{2}(z_n + \bar{z}_n)$ et $y_n = \frac{1}{2i}(z_n - \bar{z}_n)$. La réciproque est évidente.

7.6.2 Sommation par paquets

Théorème 7.6.3 *(Somme par paquets) Soit E un espace vectoriel normé, $\sum x_n$ une série à termes dans E , φ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . On*

pose $y_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} x_k$ et pour $n \geq 1$, $y_n = \sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} x_k$. Alors

- (i) si la série $\sum x_n$ converge, la série $\sum y_n$ converge et a même somme
- (ii) la réciproque est vraie dans les deux cas suivants
 - (a) la suite x_n tend vers 0 et la suite $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ (la taille des "paquets") est majorée
 - (b) $E = \mathbb{R}$ et à l'intérieur de chaque "paquet" ($k \in [\varphi(n-1)+1, \varphi(n)]$), tous les x_k , sont de même signe.

Démonstration On a d'abord

$$S_n(y) = \sum_{p=0}^n \left(\sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} x_k \right) = \sum_{k=0}^{\varphi(n)} x_k = S_{\varphi(n)}(x)$$

(en convenant que $\varphi(-1) = -1$). La suite $S_n(y)$ est donc une sous suite de la suite $S_n(x)$, ce qui montre l'assertion (i).

(ii.a) Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ et K tel que $\forall n, \varphi(n+1) - \varphi(n) \leq K$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et p l'unique entier tel que $\varphi(p-1) < n \leq \varphi(p)$. On a alors

$$S_p(y) - S_n(x) = S_{\varphi(p)}(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} x_k$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \|x_n\| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Alors pour $n \geq N$,

on a $\|S_p(y) - S_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} \|x_k\| \leq (\varphi(p) - n) \frac{\varepsilon}{2K} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Mais il existe N' tel que $q \geq N' \Rightarrow \|S - S_q(y)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si on choisit $n \geq \max(N, \varphi(N'))$, on a $p \geq N'$ et donc

$$\|S - S_n(x)\| \leq \|S - S_p(y)\| + \|S_p(y) - S_n(x)\| < \varepsilon$$

ce qui montre que la série $\sum x_n$ converge.

(ii.b) La démonstration est similaire mais on remarque que

$$\begin{aligned} |S_p(y) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} x_k \right| = \sum_{k=n+1}^{\varphi(p)} |x_k| \\ &\leq \sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} |x_k| = \left| \sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} x_k \right| \\ &= |y_p| \end{aligned}$$

(car tous les x_k sont de même signe). Comme la série $\sum y_q$ converge, pour $q \geq N$ on a $|y_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour $n \geq \varphi(N)$, on a $p \geq N$ et donc $|S_p(y) - S_n(x)| \leq |y_p| < \frac{\varepsilon}{2}$. On achève alors la démonstration comme dans le cas précédent.

Remarque 7.6.1 La réciproque de (i) n'est pas valable en toute généralité comme le montre l'exemple de la série $\sum (-1)^n$ et de $\varphi(n) = 2n$. On a alors $y_n = 0$, la série $\sum y_n$ converge alors que la série $\sum x_n$ est divergente. La réciproque (ii.b) est particulièrement intéressante pour le cas de séries de nombres réels qui ne sont pas de signe constant ; en regroupant ensemble les termes consécutifs de même signe, on obtient une série de même nature que la série initiale et dont les termes sont alternés en signe.

7.6.3 Modification de l'ordre des termes

Nous allons ici étudier l'effet d'une permutation sur les termes d'une série convergente. Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant.

Théorème 7.6.4 Soit $\sum x_n$ une série à termes réels ou complexes absolument convergente et soit $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective, une permutation de \mathbb{N} . Alors la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Démonstration Premier cas : série à termes réels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le plus grand élément de $\sigma([0, n])$. On a alors

$$\sum_{k=0}^n x_{\sigma(k)} \leq \sum_{p=0}^{N_n} x_p \leq \sum_{p=0}^{+\infty} x_p$$

ce qui montre que la série à termes réels positifs $\sum x_{\sigma(k)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} \leq$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$. Mais les deux séries jouent un rôle symétrique puisque $x_n = x_{\sigma^{-1}(\sigma(n))}$, et donc on

a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ ce qui nous donne l'égalité.

Deuxième cas : séries à termes réels On introduit, comme d'habitude, pour $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(x, 0) \in \mathbb{R}^+$ et $x^- = \max(-x, 0) \in \mathbb{R}^+$ si bien que $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$. On a alors $0 \leq x_n^+ \leq |x_n|$ et $0 \leq x_n^- \leq |x_n|$, ce qui montre que les deux séries à termes positifs $\sum x_n^+$ et $\sum x_n^-$ sont convergentes. D'après le premier cas de la démonstration, les deux séries $\sum x_{\sigma(n)}^+$ et $\sum x_{\sigma(n)}^-$ sont convergentes et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^+, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^-$$

Comme $|x_{\sigma(n)}| = x_{\sigma(n)}^+ + x_{\sigma(n)}^-$, la série $\sum |x_{\sigma(n)}|$ converge, donc la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et comme $x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)}^+ - x_{\sigma(n)}^-$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

Troisième cas : séries à termes complexes On travaille de la même façon avec les parties réelles et parties imaginaires. On a $0 \leq |\operatorname{Re}(x_n)| \leq |x_n|$ et $0 \leq |\operatorname{Im}(x_n)| \leq |x_n|$, ce qui montre que les deux séries $\sum \operatorname{Re}(x_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(x_n)$ sont absolument convergentes. D'après le deuxième cas de la démonstration, les deux séries $\sum \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)})$ et $\sum \operatorname{Im}(x_{\sigma(n)})$ sont absolument convergentes et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_n), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(x_n)$$

Comme $|x_{\sigma(n)}| \leq |\operatorname{Re}(x_{\sigma(n)})| + |\operatorname{Im}(x_{\sigma(n)})|$, la série $\sum |x_{\sigma(n)}|$ converge, donc la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est absolument convergente, et comme $x_{\sigma(n)} = \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)}) + i \operatorname{Im}(x_{\sigma(n)})$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_{\sigma(n)}) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(x_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

Remarque 7.6.2 La condition de convergence absolue est indispensable à la validité du théorème. Considérons la série semi convergente $\sum x_n$ avec $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et soit S sa somme (on peut montrer que $S = \log 2$). Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(3k+1) = 2k+1$, $\varphi(3k+2) = 4k+2$ et $\varphi(3k+3) = 4k+4$. On vérifie facilement que φ est une bijection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} (la bijection réciproque est définie par des congruences modulo 4). Sommons alors par paquets de 3 la série $\sum x_{\varphi(n)}$. On a

$$\begin{aligned} & x_{\varphi(3k+1)} + x_{\varphi(3k+2)} + x_{\varphi(3k+3)} \\ &= \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} \\ &= \frac{1}{2} (x_{2k+1} + x_{2k+2}) \end{aligned}$$

Ceci montre (réciproque du théorème de sommation par paquets, la taille des paquets étant bornée et le terme général tendant vers 0) que la nouvelle série converge encore, mais que sa somme est la moitié de la somme de la série initiale.

7.6.4 Produit de Cauchy

Définition 7.6.1 Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels ou complexes. On appelle produit de Cauchy (ou produit de convolution) des deux séries, la série $\sum c_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Théorème 7.6.5 Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels ou complexes, absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est une série absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Démonstration Cas particulier : les deux séries sont à termes réels positifs. Notons $K_n = [0, n] \times [0, n] \subset \mathbb{N}^2$ et $T_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leq n\}$. On a évidemment

$T_n \subset K_n \subset T_{2n}$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n c_k &= \sum_{k=0}^n \sum_{p+q=k} a_p b_q = \sum_{(p,q) \in T_n} a_p b_q \leq \sum_{(p,q) \in K_n} a_p b_q \\ &= \sum_{p=0}^n a_p \sum_{q=0}^n b_q \leq \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \sum_{q=0}^{+\infty} b_q \end{aligned}$$

La série $\sum c_n$ est une série à termes réels positifs dont les sommes partielles sont majorées, donc elle converge. De plus les inclusions $T_n \subset K_n \subset T_{2n}$ se traduisent par $S_n(c) \leq S_n(a)S_n(b) \leq S_{2n}(c)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S(c) = S(a)S(b)$ ce qui est la formule souhaitée.

Cas général Posons $a'_n = |a_n|$, $b'_n = |b_n|$ et $c'_n = \sum_{p+q=n} |a_p||b_q|$ leur produit de Cauchy,

et désignons par $S_n(a')$, $S_n(b')$ et $S_n(c')$ les sommes partielles d'indice n de ces trois séries. Puisque les séries $\sum a'_n$ et $\sum b'_n$ sont convergentes, le cas particulier ci dessus montre que la série $\sum c'_n$ est convergente et que sa somme est le produit des sommes de ces deux séries. Mais, comme $|c_n| \leq c'_n$, on en déduit la convergence absolue de la série $\sum c_n$. On a alors

$$\begin{aligned} |S_n(a)S_n(b) - S_n(c)| &= \left| \sum_{(p,q) \in K_n} a_p b_q - \sum_{(p,q) \in T_n} a_p b_q \right| = \left| \sum_{(p,q) \in K_n \setminus T_n} a_p b_q \right| \\ &\leq \sum_{(p,q) \in K_n \setminus T_n} |a_p||b_q| = \sum_{(p,q) \in K_n} |a_p||b_q| - \sum_{(p,q) \in T_n} |a_p||b_q| = S_n(a')S_n(b') - S_n(c') \end{aligned}$$

Puisque la somme de la série $\sum c'_n$ est le produit des sommes des deux séries $\sum a'_n$ et $\sum b'_n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(a')S_n(b') - S_n(c')) = 0$ et donc par la majoration ci-dessus $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n(a)S_n(b) - S_n(c)) = 0$, ce qui montre que la somme de la série $\sum c_n$ est le produit des sommes des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et achève la démonstration.

Remarque 7.6.3 On aurait pu passer aussi du cas réel positif au cas complexe en utilisant, comme dans le théorème de permutation des termes, les parties positives x^+ et x^- d'un réel x , puis les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, mais la démonstration n'aurait pas pu se généraliser comme nous le ferons ci-dessous au cas d'une application bilinéaire plus générale.

Remarque 7.6.4 Le théorème ci dessus n'est plus valable pour des séries convergentes :

posons $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. On a $|c_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Mais pour $k \in [0, n]$, $(k+1)(n-k+1) \leq (\frac{n}{2} + 1)^2$ (facile). Donc $|c_n| \geq \frac{n+1}{\frac{n}{2} + 1}$ qui tend vers 2 ; donc la suite (c_n) ne tend pas vers 0 et la série $\sum c_n$ diverge.

On a une généralisation du théorème précédent sous la forme suivante qui nous sera utile quand nous considérerons des séries d'endomorphismes.

Théorème 7.6.6 *Soit E, F et G sont trois espaces vectoriels normés, $u : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire continue, $\sum a_n$ une série à termes dans E absolument convergente, $\sum b_n$ une série à termes dans F absolument convergente, et si l'on pose $c_n = \sum_{p+q=n} u(a_p, b_q)$, alors la série $\sum c_n$ est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = u \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Démonstration La démonstration est tout à fait similaire : utiliser l'existence d'un réel positif K tel que $\|u(x, y)\| \leq K\|x\| \|y\|$ pour montrer que $|S_n(a)S_n(b) - S_n(c)| \leq K(S_n(a')S_n(b') - S_n(c'))$ en posant $a'_n = \|a_n\|$, $b'_n = \|b_n\|$ et $c'_n = \sum_{p+q=n} \|a_p\| \|b_q\|$

7.7 Séries doubles

En anticipant un peu sur le chapitre concernant les séries de fonctions, nous ferons appel au lemme suivant pour la démonstration du théorème fondamental sur les séries doubles.

Lemme 7.7.1 (Weierstrass : théorème de convergence dominée pour les séries) *Soit $(x_{n,q})_{(n,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On fait les hypothèses suivantes*

- il existe une série à termes réels positifs $\sum \alpha_n$ convergente telle que $\forall q \in \mathbb{N}, |x_{n,q}| \leq \alpha_n$
- pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{q \rightarrow +\infty} x_{n,q}$ existe (on appelle y_n cette limite)

Alors, pour chaque $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n x_{n,q}$ est absolument convergente ainsi que la série

$\sum_n y_n$, la suite $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ admet une limite quand q tend vers $+\infty$ et on a

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

autrement dit

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{q \rightarrow +\infty} x_{n,q}$$

(intersion de la limite et du signe somme)

Démonstration L'inégalité $|x_{n,q}| \leq \alpha_n$, celle qui s'en déduit par passage à la limite $|y_n| \leq \alpha_n$ et la convergence de la série $\sum \alpha_n$ montrent les convergences absolues des séries $\sum_n x_{n,q}$ et $\sum_n y_n$. Prenons donc $\varepsilon > 0$ et choisissons M tel que $\sum_{n=M+1}^{+\infty} \alpha_n < \frac{\varepsilon}{4}$. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} y_n - \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} \right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |y_n - x_{n,q}| \leq \sum_{n=0}^M |y_n - x_{n,q}| + \sum_{n=M+1}^{+\infty} (|y_n| + |x_{n,q}|) \\ &\leq \sum_{n=0}^M |y_n - x_{n,q}| + 2 \sum_{n=M+1}^{+\infty} \alpha_n \leq \sum_{n=0}^M |y_n - x_{n,q}| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant, on a $\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^M |y_n - x_{n,q}| = 0$ (chacun des termes de cette somme admet 0

pour limite), et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq N \Rightarrow \sum_{n=0}^M |y_n - x_{n,q}| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc

$$q \geq N \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{+\infty} y_n - \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui montre que la suite $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} \right)_{q \in \mathbb{N}}$ admet la limite $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ quand q tend vers $+\infty$.

Remarque 7.7.1 Le lecteur qui a déjà des connaissances sur les séries de fonctions, remarquera qu'il s'agit là tout simplement du théorème d'interversion des limites dans le cas de convergence normale (donc uniforme) d'une série de fonctions.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème d'interversion des signes *somme* dans les séries doubles.

Théorème 7.7.2 Soit $u = (u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. On suppose que

- pour tout entier n la série $\sum_p u_{n,p}$ est absolument convergente

- la série $\sum_n \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ est convergente

Alors les séries $\sum_n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$ et $\sum_p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$ sont convergentes et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

Démonstration Nous allons appliquer le lemme précédent en posant $x_{n,q} = \sum_{p=0}^q u_{n,p}$ et $\alpha_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$ et bien entendu $y_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \lim_{q \rightarrow +\infty} x_{n,q}$. Les hypothèses du lemme étant évidemment vérifiées, on sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}$ admet la limite $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ quand q tend vers $+\infty$. Mais, puisque l'on a l'égalité $|u_{n,p}| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|$, la série $\sum_n u_{n,p}$ est absolument convergente pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^q u_{n,p} = \sum_{p=0}^q \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$$

L'existence de $\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,q}$ montre donc que la série $\sum_p \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ est convergente et a pour somme $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ autrement dit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

Remarque 7.7.2 En appliquant le théorème à la suite $u' = (|u_{n,p}|)_{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, on constate que la série $\sum_p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right)$ est convergente, ce qui implique la convergence absolue de la série $\sum_p \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

Remarque 7.7.3 On pourra retenir le théorème précédent sous la forme suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}| \right) < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

7.8 Espaces de suites

Définition 7.8.1 On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si la série $\sum x_n$ est absolument convergente.

Proposition 7.8.1 *L'ensemble $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables de nombres complexes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. L'application $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est une norme sur cet espace vectoriel. L'application $u \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ est linéaire de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans \mathbb{C} .*

Démonstration Si (u_n) et (v_n) sont deux suites sommables et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, les suites $(|u_n|)$ et $(|v_n|)$ sont sommables; il en est donc de même de la suite $(|\alpha| |u_n| + |\beta| |v_n|)$ (résultat sur les séries à réels positifs) et donc de la suite $(|\alpha u_n + \beta v_n|)$ puisque $|\alpha u_n + \beta v_n| \leq |\alpha| |u_n| + |\beta| |v_n|$. Donc la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est sommable. La suite nulle étant de surcroît sommable, l'ensemble $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables de nombres complexes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La vérification des propriétés d'une norme est élémentaire. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p (\alpha u_n + \beta v_n) \\ &= \alpha \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p u_n + \beta \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p v_n \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \end{aligned}$$

d'où la linéarité de $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 7.8.2 *L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites de nombres complexes dont les carrés forment une suite sommable est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. L'application $(u, v) = ((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \mapsto (u | v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$ est un produit scalaire hermitien sur cet espace;*

en conséquence l'application $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur cet espace vectoriel.

Démonstration Il est clair que si (u_n) est de carré sommable, il en est de même de $\alpha(u_n) = (\alpha u_n)$. Si (u_n) et (v_n) sont de carré sommable, l'inégalité élémentaire $|u_n + v_n|^2 \leq 2|u_n|^2 + 2|v_n|^2$ montre que la suite $(u_n + v_n)$ est de carré sommable. La suite nulle étant de surcroît de carré sommable, les suites de carrés sommables forment donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) et (v_n) sont de carré sommable, l'inégalité élémentaire $|\overline{u_n} v_n| \leq \frac{1}{2} |u_n|^2 + \frac{1}{2} |v_n|^2$ montre que la suite $(\overline{u_n} v_n)$ est sommable. On peut donc poser $(u | v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$. Il est clair que $(u, v) \mapsto (u | v)$ est sesquilinéaire

hermitienne. De plus, si $u \neq 0$, $(u | u) \in \mathbb{R}^{+*}$ ce qui montre que cette forme sesquilinéaire est définie positive; on a donc un produit scalaire hermitien et la norme associée est $\|u\|_2^2 = (u | u)$.

Remarque 7.8.1 Le théorème ci dessus n'est plus valable pour des séries convergentes :

posons $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. On a $|c_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Mais pour $k \in [0, n]$, $(k+1)(n-k+1) \leq (\frac{n}{2} + 1)^2$ (facile). Donc $|c_n| \geq \frac{n+1}{\frac{n}{2} + 1}$ qui tend vers 2; donc la suite (c_n) ne tend pas vers 0 et la série $\sum c_n$ diverge.

7.9 Compléments : développements asymptotiques, analyse numérique

7.9.1 Calcul approché de la somme d'une série

L'idée naturelle est d'approcher la somme S de la série convergente $\sum x_n$ par une somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^N x_n$. L'erreur de méthode est évidemment égale à $R_N =$

$\sum_{n=N+1}^{+\infty} x_n$. Bien entendu, à cette erreur de méthode vient s'ajouter une erreur de calcul de

la somme S_N que l'on peut estimer majorée par $N\varepsilon$ où ε est la précision de l'instrument de calcul. Entre la valeur cherchée S et la valeur calculée $\overline{S_N}$ il y a donc une erreur du type $|S - \overline{S_N}| \leq |R_N| + N\varepsilon = \delta(N)$ que l'on cherchera donc à minimiser (la fonction δ tend manifestement vers $+\infty$ quand N croît indéfiniment).

Etudions pour cela deux cas. Dans le premier cas, la série est à convergence géométrique : $|x_n| \leq A\rho^n$ avec $\rho < 1$. Alors $R_N \leq B\rho^N$ et $\delta(N) \leq \delta_1(N) = B\rho^N + N\varepsilon$. On a $\delta_1'(t) = B(\log \rho)\rho^t + \varepsilon$ qui s'annule pour $t = t_0 = \frac{1}{\rho} \log \left| \frac{\varepsilon}{B \log \rho} \right|$. On a intérêt à choisir N aussi proche que possible de t_0 où la fonction δ_1 atteint son minimum.

Exemple 7.9.1 : $\varepsilon = 10^{-8}$, $B = 1$, $\rho = \frac{9}{10}$. On trouve un N de l'ordre de 150 pour une erreur de l'ordre de 10^{-5} . C'est parfaitement raisonnable.

Dans le second cas, la série est à convergence polynomiale : $|x_n| \leq \frac{A}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Alors $R_N \leq \frac{B}{n^{\alpha-1}}$ et $\delta(N) \leq \delta_1(N) = \frac{B}{N^{\alpha-1}} + N\varepsilon$. On a $\delta_1'(t) = B(1-\alpha)t^{-\alpha} + \varepsilon$ qui s'annule pour $t = t_0 = \left(\frac{B(\alpha-1)}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$. On a intérêt à choisir N aussi proche que possible de t_0 où la fonction δ_1 atteint son minimum.

Exemple 7.9.2 : $\varepsilon = 10^{-8}$, $B = 1$, $\alpha = \frac{11}{10}$. On trouve un N de l'ordre de 10^7 pour une erreur de l'ordre de 0,25. On voit que la méthode fournit un résultat très médiocre en un temps très long ; elle demande donc à être améliorée par une accélération de convergence.

7.9.2 Accélération de la convergence

Supposons que x_n admet un développement asymptotique de la forme

$$x_n = \frac{a_0}{n^K} + \frac{a_1}{n^{K+1}} + \dots + \frac{a_N}{n^{K+N}} + \varepsilon_n$$

avec $|\varepsilon_n| \leq \frac{A}{n^{K+N+1}}$. Posons $u_n = \frac{b_0}{n^{K-1}} + \dots + \frac{b_N}{n^{K+N-1}}$ (où b_0, \dots, b_N sont des coefficients à déterminer) puis $y_n = u_n - u_{n+1}$, et cherchons à déterminer les b_i de telle sorte que $|x_n - y_n| \leq \frac{B}{n^{K+N+1}}$ (pour une certaine constante B), c'est-à-dire, $x_n - y_n = O(\frac{1}{n^{K+N+1}})$.

On a $u_n = \sum_{i=0}^N \frac{b_i}{n^{K+i-1}}$, d'où

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=0}^N b_i \left(\frac{1}{n^{K+i-1}} - \frac{1}{(n+1)^{K+i-1}} \right) \\ &= \sum_{i=0}^N b_i \frac{1}{n^{K+i-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-K-i} \right) \end{aligned}$$

On sait que la fonction $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ admet au voisinage de 0 un développement limité $f_\alpha(x) = 1 + \sum_{k=1}^p c_k^{(\alpha)} x^k + O(x^{p+1})$ avec $c_k^{(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. On en déduit que

$$1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-K-i} = - \sum_{k=1}^{N+1-i} c_k^{(1-K-i)} \frac{1}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{N+2-i}}\right)$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{K+i-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-K-i} \right) &= - \sum_{k=1}^{N+1-i} c_k^{(1-K-i)} \frac{1}{n^{k+K+i-1}} + O\left(\frac{1}{n^{N+K+1}}\right) \\ &= - \sum_{k=i}^N c_{k+1-i}^{(1-K-i)} \frac{1}{n^{k+K}} + O\left(\frac{1}{n^{N+K+1}}\right) \end{aligned}$$

après changement d'indices. On en déduit

$$\begin{aligned} y_n &= - \sum_{i=0}^N b_i \sum_{k=i}^N c_{k+1-i}^{(1-K-i)} \frac{1}{n^{k+K}} + O\left(\frac{1}{n^{N+K+1}}\right) \\ &= - \sum_{k=0}^N \frac{1}{n^{k+K}} \sum_{i=0}^k b_i c_{k+1-i}^{(1-K-i)} + O\left(\frac{1}{n^{N+K+1}}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$x_n - y_n = O\left(\frac{1}{n^{K+N+1}}\right) \iff \forall k \in [0, n], a_k + \sum_{i=0}^k b_i c_{1-k-i}^{(1-K-i)} = 0$$

Il s'agit d'un système triangulaire en les inconnues b_i qui admet une unique solution. En faisant le changement d'indice $j = k + 1 - i$, on obtient le système

$$\forall k \in [0, n], a_k + \sum_{j=1}^{k+1} b_{k+1-j} c_j^{(-K-k+j)} = 0$$

On calcule donc les b_k à l'aide de la formule de récurrence $c_1^{(-K-k+1)} b_k = -a_k - \sum_{j=2}^{k+1} b_{k+1-j} c_j^{(-K-k+j)}$ où les $c_j^{(t+j)}$ sont définis par récurrence par $c_1^{(t+1)} = t + 1$ et $c_{j+1}^{(t+j+1)} = \frac{t+j+1}{j+1} c_j^{(t+j)}$. Supposons les b_i déterminés. Il existe une constante B telle que $|x_n - y_n| \leq \frac{B}{n^{K+N+1}}$. L'erreur faite en approchant la somme de la série $\sum (x_n - y_n)$ par sa somme partielle d'indice n est donc majorée par $\frac{B}{K+N} \frac{1}{n^{K+N}}$. Mais la somme partielle d'indice n de la série est

$$\sum_{k=1}^n (x_k - y_k) = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) = S_n + u_1 - u_{n+1}$$

et la somme de la série est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n - \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}) = S - u_1$$

(puisque $\lim u_n = 0$). On a donc $|S - S_n + u_{n+1}| \leq \frac{B}{K+N} \frac{1}{n^{K+N}}$ et $S_n - u_{n+1}$ est donc une bien meilleure valeur approchée de S que S_n .

Bien entendu ces méthodes peuvent se généraliser à d'autres types de développements asymptotiques : l'idée générale étant de trouver une suite u_n telle que la série $x_n - (u_n - u_{n+1})$ ait une décroissance vers 0 aussi rapide que possible. Alors $S_n - u_{n+1}$ est donc une bien meilleure valeur approchée de S que S_n . Cette méthode fournira également des développements asymptotiques de restes de séries car si $x_n - (u_n - u_{n+1}) = o(v_n)$, on aura $R_n(x) + u_{n+1} = o(R_n(v))$ et donc le développement $R_n(x) = -u_{n+1} + o(R_n(v))$.

En ce qui concerne les développements asymptotiques de sommes partielles de séries divergentes, on se ramènera à la situation précédente en remplaçant la série x_n par une série du type $y_n = x_n - (v_n - v_{n-1})$ de telle sorte que la série $\sum y_n$ converge. On aura alors $S_n(x) = v_n - v_0 + S_n(y) = v_n + A + R_n(y)$ où $A = S(y) - v_0$ est une constante (sa valeur ne pourra pas être obtenue directement par cette méthode). Il suffira ensuite d'appliquer la méthode précédente pour obtenir un développement asymptotique de $R_n(y)$ à la précision souhaitée, et donc aussi un développement asymptotique de $R_n(x)$.

Nous allons traiter deux exemples importants des techniques ci dessus.

Exemple 7.9.3 On recherche un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Posons $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \log(n) - \log(n-1) = -\log(1 - \frac{1}{n})$. On a $z_n = x_n - y_n = \frac{1}{n} - \log(1 - \frac{1}{n}) = -\frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})$. On en déduit que la série $\sum z_n$ converge. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 1 + \sum_{k=2}^n z_k + \sum_{k=2}^n y_k = 1 + \sum_{k=2}^n z_k + \sum_{k=2}^n (\log k - \log(k-1)) \\ &= \log n + (1 + \sum_{k=2}^{+\infty} z_k) - R_n(z) \end{aligned}$$

Mais les théorèmes de comparaison des séries à termes de signes constants assurent que puisque $z_n \sim -\frac{1}{2n^2}$, on a $R_n(z) \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{2n}$. Posons alors $\gamma = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} z_k$ (la constante d'Euler); on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

(en fait il est clair que les techniques ci dessus permettent d'obtenir un développement à un ordre arbitraire).

Exemple 7.9.4 Nous allons maintenant montrer la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$.

Pour cela posons $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$ et $b_n = \log a_n - \log a_{n-1}$ (pour $n \geq 2$). On a

$$\begin{aligned} b_n &= \log \frac{a_n}{a_{n-1}} = \log \frac{n!e^n(n-1)^{n-1/2}}{(n-1)!e^{n-1}n^{n+1/2}} \\ &= \log \left(e \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n-1/2}} \right) = 1 + (n - \frac{1}{2}) \log(1 - \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

d'où $b_n = 1 + (n - \frac{1}{2})(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O(\frac{1}{n^4})) = -\frac{1}{12n^2} + O(\frac{1}{n^3})$ On en déduit

que la série $\sum b_n$ converge. Soit S sa somme. On a alors $\sum_{k=2}^n b_k = S - R_n(b)$, mais

comme $b_n \sim -\frac{1}{12n^2}$, on a $R_n(b) \sim -\frac{1}{12} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{12n}$. On a d'autre part $\sum_{k=2}^n b_k =$

$\log a_n - \log a_1$, d'où finalement $\log a_n = \sum_{k=2}^n b_k + \log a_1 = S + \log a_1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})$ et donc

$a_n = e^{S+\log a_1} \exp(\frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})) = \ell(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}))$ en posant $\ell = e^{S+\log a_1} > 0$, soit encore

$$n! = \ell \frac{n^{n+1/2}}{n!} \left(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n}) \right)$$

La méthode précédente ne permet pas d'obtenir la valeur de ℓ ; on obtient celle ci classiquement à l'aide des intégrales de Wallis : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$. Pour $n \geq 2$, on écrit à l'aide d'une intégration par parties, en intégrant $\sin x$ et en dérivant $\sin^{n-1} x$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx \\ &= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

d'où $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. En tenant compte de $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on a alors

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 3 \cdot 1}{(2p)(2p-2) \dots 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

en multipliant numérateur et dénominateur par $(2p)(2p-2) \dots 4 \cdot 2$ de manière à rétablir les facteurs manquant au numérateur. De même

$$I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2) \dots 4 \cdot 2}{(2p+1)(2p-1) \dots 3} = \frac{2^p (p!)^2}{(2p+1)!}$$

On en déduit en utilisant $n! \sim \ell \sqrt{n} \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = \frac{(2p+1)(2p)!^2 \pi}{2^{4p} p!^4} \frac{\pi}{2} \sim \frac{(2p+1)\ell^2 (2p)(2p)^{4p} e^{4p} \pi}{2^{4p} e^{4p} \ell^4 p^2 p^{4p}} \frac{\pi}{2} \sim \frac{2\pi}{\ell^2}$$

Mais d'autre part, on a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin^{n+1} x \leq \sin^n x \leq \sin^{n-1} x$, soit en intégrant $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$ et en tenant compte de $\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$, on obtient $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$ soit encore $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$. On en déduit que $\frac{2\pi}{\ell^2} = 1$ et comme $\ell > 0$, $\ell = \sqrt{2\pi}$ ce qui achève la démonstration.

Index

- Abel, 271, 287, 312
 - transformation, 287
- abscisse curviligne, 550
- accroissements finis, 191, 197, 420, 435
- accumulation, 102
- adhérence, 97
- adjacentes, 151
- adjoint, 356, 386
- affine
 - application, 498
 - base, 495
 - espace, 493
 - forme, 501
 - hyperplan, 502, 516
 - repère, 494, 500
 - sous-espace, 495
- affine par morceaux, 209
- aire, 607
- algèbre, 38
- alternée, 61, 68, 165, 286
- analytique, 309
- angle, 372
 - mesure, 373
- anneau, 16
 - caractéristique, 24
 - euclidien, 23, 28
 - intègre, 17, 28
 - morphisme, 18
 - principal, 20, 23, 28
 - quotient, 18
- antihermitienne, 376, 378
- antisymétrique, 61, 332, 357
- arc paramétré, 525
- asymptote, 532, 534, 540
- autoadjoint, 357, 388
- automorphismes, 39
- autonome, 481
- Bézout, 21, 28
- Baire, 132
- Banach, 126, 134
- Banach-Steinhaus, 133
- banal, 530, 540
- barycentre, 126, 504
 - associativité, 504
- base, 39, 573, 576, 577
 - duale, 45
 - existence, 41
 - incomplète, 41
- Bernoulli, 249
- Bertrand, 159, 241, 242, 266
- Bessel, 403, 411
- bidual, 51
- bilinéaire, 331
- birégulier, 528, 535, 539, 542, 554
- bissectrice, 374, 522
- Bolzano-Weierstrass, 115
- Borel-Lebesgue, 117
- borné, 100
- borne
 - inférieure, 3
 - supérieure, 3
- boule, 99
- branche infinie, 532
- caractéristique
 - polynôme, 75
 - sous-espace, 85
- caractère, 395
- Carathéodory, 138, 508
- cardinal, 4
- carrés, 344
- Cauchy, 112, 114, 152, 157, 164, 178, 267, 276, 284, 309

- Cauchy-Lipschitz, 315, 454, 457, 459, 466, 476, 477, 479, 480
- Cayley-Hamilton, 82
- centre, 6
- cercle, 520, 542
- cercle de convergence, 312
- changement de variable, 144, 225
- changement de variables, 600
- Chasles, 221, 246, 374, 549
- chinois, 24
- choix, 3
- circulation, 588
- classe
 - d'équivalence, 1
 - formule des classes, 13
- cocycliques, 520
- compact, 115, 118, 119, 132, 152
- comparaison, 239, 247, 264
 - échelle, 148
- complet, 113, 129, 132, 161, 198
- conchoïde, 545
- conditions initiales, 452
- cône, 574, 577
- conique, 580
- conjugué
 - éléments, 6
- conjugués
 - cycles, 14
- connexe, 120, 122, 126
- contact, 535
- continue, 109–111, 127, 132, 186, 278, 288, 295, 298, 301, 308
- contractante, 115, 198
- convergence
 - absolue, 267, 284, 303
 - dominée, 283
 - monotone, 281, 292
 - normale, 285, 303, 399
 - simple, 273, 284
 - uniforme, 273, 284
- convergente, 104, 151
 - absolument, 161
 - semi-, 165
- convexe, 121, 126, 135, 139, 194, 507
- convexité, 532
- convolution, 178, 412
- corde, 527
- corps, 18
- courbure, 553, 561
- Cramer, 70
- cycle, 14, 15
- cylindre, 574, 576, 582
 - elliptique, 582
 - hyperbolique, 582
 - parabolique, 582
- d'Alembert, 163, 305
- dédoublement, 340
- définie, 337
- dégénérée, 335, 381
- dénombrable, 173
- dérivée, 186, 189, 204, 281, 290
 - partielle, 32, 417, 421
- dérivable, 296, 299, 301, 311
- déterminant
 - développement, 66
 - endomorphisme, 63
 - famille, 62
 - matrice, 64
- développée, 557
- développable, 313
- développante, 559
- développement
 - asymptotique, 149
 - limité, 144, 147
- Darboux, 223
- degré, 26
- dense, 98
- diagonalisable, 77, 78, 80, 84, 85, 329
- diamètre, 100
- difféomorphisme, 192, 447
- différentiable, 431
- différentielle, 431
 - extérieure, 438
- dimension, 42, 496
 - finie, 42
- directrice, 573, 576, 577
- Dirichlet, 397, 404, 407, 411
- discriminant, 334
- distance, 99, 125
- divergente, 104
- division

- euclidienne, 10, 27
 - puissances croissantes, 31
- domination, 141
- drapeau, 74
- droite, 542
- dual, 45
 - dimension, 46
- Duhamel, 164
- ellipse, 581
- ellipsoïde, 582
- elliptique, 569
- endomorphismes, 39
- entier, 4
- enveloppe, 536
- équivalent, 142
- escalier, 209
- espace métrique, 99
- espace vectoriel, 35
- Euclide, 23
- euclidien
 - anneau, 23
- Euler, 33, 475, 488
- Euler-Mac Laurin, 250, 253
- excentricité, 543
- extrémal, 139
- extremum, 428
- factorisation
 - canonique, 9, 18
- famille
 - génératrice, 39
 - liée, 39
 - libre, 39, 75
- fermé, 96, 106, 114
- Fermat, 12
- forme différentielle, 436, 483, 585
- forme normale, 451
- forme polaire, 338
- forme quadratique, 338, 383
- Fourier
 - coefficients, 401
 - série, 402
- Frénet, 552, 556, 560
- fraction rationnelle, 229
- frontière, 98
- Fubini, 595, 597, 599, 600
- génératrice, 573
- Gamma, 300
- Gauss, 21, 22, 28, 346
- gradient, 437, 590
- Gram, 341, 351, 352, 369
- graphe fermé, 135
- Green-Riemann, 606
- Gronwall, 453
- groupe, 5
 - abélien, 5
 - commutatif, 5
 - cyclique, 12
 - opérant, 13
 - quotient, 8, 11
- Hölder, 196
- Hadamard, 305
- Hahn-Banach, 137
- hauteur, 522
- Heine, 117
- hermitien, 385, 388, 392, 401
- hermitienne, 376, 378
- homéomorphisme, 111
- homogène
 - équation, 456, 462, 466, 471, 487
 - polynôme, 32
 - système, 70
- homotope, 322
- hyperbole, 582
- hyperbolique, 569
- hyperboloïde, 582
- hyperplan, 47, 51
- idéal, 17
 - annulateur, 81
 - maximal, 19
 - principal, 20
- image, 9, 525, 563
- implicite, 443, 575
- incomplète, 486
- index, voir base
- indicateur d'Euler, 25
- inductif, 3
- induit, 73

- inflexion, 530, 535
 intégrable, 236, 242, 247
 intégrale, 217, 280, 289, 292, 297
 abélienne, 233
 curviligne, 586
 de surface, 607
 impropre, 248, 258
 multiple, 592
 intégration par parties, 226
 intérieur, 97
 interpolation, 203
 intrinsèque, 559
 inverse, 5
 inversible, 16
 inversion, 544
 inversion locale, 448
 irréductible
 élément, 22
 polynôme, 29, 30
 isolé, 102
 isométrie, 100, 511
 isotrope, 337

 jacobien, 435
 jacobienne, 434
 jauge, 135
 Jordan, 87, 94

 Krein-Millman, 140

 Lagrange, 11, 203, 205
 polynômes, 49
 Laplace, 255
 Leibnitz, 509
 limite, 104, 106, 108, 109, 185
 interversion, 279, 288
 linéaire
 application, 36
 forme, 45
 semi-, 375
 système, 69
 lipschitzienne, 112, 198, 476

 médiane, 338, 522
 médiatrice, 522
 méridien, 578

 Mac Laurin, 314
 majorant, 3
 massique, 504
 matrice, 53
 équivalente, 60
 adjointe, 376
 base canonique, 55
 centre, 55
 conjuguée, 376
 passage, 59
 principale, 67
 produit, 54
 semblable, 61
 transconjuguée, 376
 transposée, 56
 maximal, 3
 mesure, 590
 minimal, 3
 Minkowski, 196, 349, 385
 minorant, 3
 Morse, 570
 moyenne, 220, 227
 multiple, 525, 535, 542, 563
 multiplicité, 76, 525, 563
 d'une racine, 29

 négligeable, 141, 590
 nappe
 équivalente, 564
 cartésienne, 563
 paramétrée, 563
 réglée, 573, 583
 neutre, 5
 Newton, 206
 nilpotent, 91
 Noether, 20, 22
 normal, 391
 normale, 565
 norme, 125, 129, 131, 276, 364
 noyau, 9, 335

 opérations élémentaires, 57
 orbite, 13
 d'une permutation, 14
 ordre, 11
 d'un cycle, 14

- orientation, 372, 526, 565
- orthogonal, 334, 380
 - endomorphisme, 359, 366, 367
 - polynôme, 354
- orthogonale
 - famille, 342
 - matrice, 361
 - trajectoire, 543
- orthonormée, 342, 386
- osculateur, 528, 535, 557
- ouvert, 95

- paquets, 167, 261
- parabole, 582
- parabolique, 569
- paraboloïde
 - elliptique, 582
 - hyperbolique, 582
- parallèle, 497, 578
- Parseval, 398, 409, 412
- pavé, 590
- Peano, 4
- permutation, 14, 171
- PGCD, 21, 28
- pivot, 57, 72
- plan tangent, 565, 573
- plus grand élément, 3
- plus petit élément, 3
- podaire, 545
- Poincaré, 441
- point fixe, 115
- polaire, 538, 552
- polarisation, 338
- polyèdre, 140
- polynôme, 26
 - caractéristique, 75
 - homogène, 32
 - symétrique, 33
- polynôme minimal, 81
- positive, 347, 385
- PPCM, 21, 28
- préhilbertien, 350, 385
- prépondérance, 141
- primitive, 224
 - usuelle, 228
- produit vectoriel, 369

- projection, 514
- Pythagore, 339, 383, 403

- quadrique, 580
- quotient
 - ensemble, 2
 - espace vectoriel, 36
 - par un sous-groupe, 7

- récurrence
 - faible, 5
 - forte, 5
- régulée, 210, 211
- régulier, 525, 539, 563
- révolution, 578
- racine, 28
- rang
 - d'une application linéaire, 44
 - d'une famille, 44
 - matrice, 57, 67
 - théorème du rang, 43
- rayon de convergence, 304
- rayon de courbure, 556
- rebroussement, 531, 540
- rectifiable, 547
- relèvement, 322, 554
- relation, 1
 - antisymétrique, 1
 - d'équivalence, 1
 - d'ordre, 2
 - partielle, 2
 - strict, 2
 - totale, 2
 - réflexive, 1
 - symétrique, 1
 - transitive, 1
- repère mobile, 552
- représentant, 1
- Riccati, 488
- Riemann, 159, 163, 290, 404, 596
 - somme, 221
- Rolle, 190, 197
- Romberg, 255
- Rouché-Fontené, 71
- Runge-Kutta, 491

- séparation, 102

- série, 155
 formelle, 26
 trigonométrique, 399
- série entière, 303
- séries
 entières, 464
- Schmidt, 352
- Schwarz, 32, 349, 385, 423
- scindé, 29, 30
- segment, 507
- sesquilineaire, 377
- signature, 15, 348
- simple, 525, 563
- Simpson, 255
- singulier, 525, 534, 563
- sommable, 169, 174
- sommation, 326
- sous suite, 105
- sous-anneau, 17
- sous-espace propre, 74
- sous-espace vectoriel
 caractérisation, 35
 engendré, 36
 somme, 37
 somme directe, 37
 supplémentaire, 38, 41
- sous-groupe, 6
 distingué, 8, 9
- sphère, 518
- stabilisateur, 13
- stable, 73
- Stirling, 183
- subdivision, 209
- substitution, 27, 31
- successeur, 5
- support, 525, 563
- surface, 446
- Sylvester, 348
- symétrique, 332, 357, 362
- système différentiel, 330
- tangente, 527
- Taylor
 Lagrange, 192, 199, 427
 polynômes, 29, 32
 reste intégral, 201, 226, 426
- Young, 145, 200, 427
- topologie, 95, 100
 induite, 98
- torsion, 561
- totalelement singulier, 526
- transposée, 52, 56
- transposition, 15
- trapèze, 252
- trigonalisable, 78, 82
- unitaire
 endomorphisme, 389, 392
 groupe, 389
 matrice, 390
- valeur d'adhérence, 105
- valeur propre, 74, 78
- valeurs intermédiaires, 122
- valuation, 26
- variables séparables, 485
- variation des constantes, 463, 468, 473
- vecteur propre, 74, 78
- voisinage, 96
- Wallis, 183
- Weierstrass, 213, 215
- wronskien, 466, 469
- zéros isolés, 308
- Zorn, 3, 19