Chapitre 10

Suites et séries de fonctions

10.1 Suites de fonctions

10.1.1 Convergence simple, convergence uniforme

Définition 10.1.1 *Soit X un ensemble, E un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E. On dit que la suite converge simplement si pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E. Dans ce cas, on pose $f(x) = \lim f_n(x)$ et on dit que $f : X \to E$ est limite simple de la suite (f_n).*

Remarque 10.1.1 La traduction en métrique de f *est limite simple de la suite* (f_n) est

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon, x), \quad n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

où l'entier N dépend à la fois de ε et de $x \in X$.

Exemple 10.1.1 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$. La suite f_n converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$. Pour un $\varepsilon < 1$ donné, le *meilleur* $N(\varepsilon, x)$ que l'on puisse prendre est 0 si $x = 1$ ou $x = 0$, et $E(\dfrac{\log \varepsilon}{\log x})$ si $0 < x < 1$. On constate que $\sup\limits_{x\in[0,1]} N(\varepsilon, x) = +\infty$. Il n'est donc pas question de prendre le même N pour tous les x.

Définition 10.1.2 *Soit X un ensemble, E un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E. On dit que la suite converge uniformément s'il existe $f : X \to E$ vérifiant les conditions équivalentes*

- *(i)* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon), \quad n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \forall x \in X,\ d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$
- *(ii)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = 0$ *où l'on a posé* $\mu_n = \sup\limits_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Démonstration L'équivalence est claire puisque $\mu_n < \varepsilon \Rightarrow (\forall x \in X,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$ et qu'inversement $(\forall x \in X,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon) \Rightarrow \mu_n \leq \varepsilon$.

Remarque 10.1.2 Il est clair que si la suite (f_n) converge uniformément vers f, elle converge simplement vers f. On en déduit que la fonction f est unique.

10.1.2 Plan d'étude d'une suite de fonctions

Soit X un ensemble, E un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E.

On commence par étudier la convergence simple de la suite de fonctions. Pour chaque $x \in X$ on étudie la suite $(f_n(x))$ d'éléments de E. Dans le cas où cette suite est convergente pour chaque $x \in X$, on définit $f : X \to E$ par $f(x) = \lim f_n(x)$; l'application f est limite simple de la suite (f_n).

On étudie ensuite la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f. Pour montrer une convergence uniforme, on peut soit chercher une suite (α_n) de limite 0 *indépendante de x* telle que $\forall x \in X,\ d(f_n(x), f(x)) \leq \alpha_n$, soit étudier directement la suite (μ_n) où $\mu_n = \sup\limits_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour montrer une non convergence uniforme, on peut soit utiliser un des théorèmes suivants qui garantissent qu'un certain nombre de propriétés des fonctions f_n sont conservées par limite uniforme, soit utiliser la proposition suivante

Proposition 10.1.1 *Soit X un ensemble, E un espace métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de X dans E. Alors la suite (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si pour toute suite (x_n) de X, on a $\lim d(f(x_n), f_n(x_n)) = 0$.*

Démonstration La condition est évidemment nécessaire puisque $0 \leq d(f(x_n), f_n(x_n)) \leq \mu_n$. Inversement, si la suite ne converge pas uniformément vers f, on a, en niant la propriété (i)

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \exists x_n \in X, \quad d(f(x_n), f_n(x_n)) \geq \varepsilon$$

Ceci définit x_n pour une infinité de n. Pour les autres, on choisit un x_n arbitraire. On a pour une infinité de n, $d(f(x_n), f_n(x_n)) \geq \varepsilon$ et donc la suite $d(f(x_n), f_n(x_n))$ ne tend pas vers 0.

Exemple 10.1.2 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. La suite f_n converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$. Prenons $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. On a $f_n(x_n) - f(x_n) = (1 - \dfrac{1}{n})^n$ de limite $\dfrac{1}{e}$ et non 0. Donc la suite ne converge pas uniformément.

Remarque 10.1.3 Lorsque la convergence n'est pas uniforme sur X tout entier, on peut rechercher des parties de X sur lesquelles cette convergence est uniforme.

Exemple 10.1.3 Soit $f_n : [0, \dfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = n^\alpha \sin^n t \cos t$. Il est clair que $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{2}],\ \lim f_n(t) = 0$: si $t \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$ on a $0 \leq \sin t < 1$ et si $t = \pi/2$, on a $\cos t = 0$.

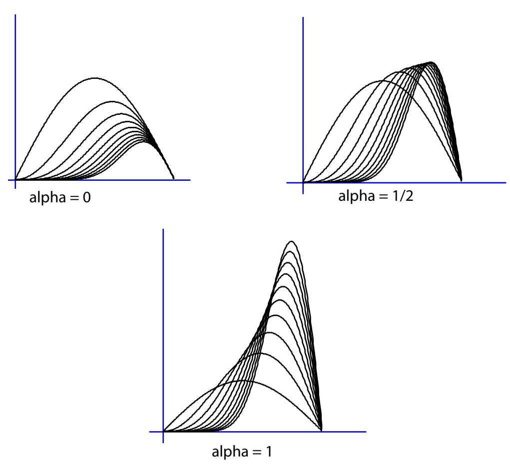
La suite converge simplement vers la fonction nulle. On a $\mu_n = \sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} |f(t) - f_n(t)| = \sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} f_n(t)$. Mais $f_n'(t) = n^\alpha \sin^{n-1} t(n-(n+1)\sin^2 t)$ et on a donc le tableau de variation, en posant $t_n = \arcsin\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$

t	0		t_n		$\frac{\pi}{2}$
$f_n(t)$	0	$\nearrow$	μ_n	$\searrow$	0

On a donc

$$\mu_n = f_n(t_n) = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{n^\alpha}{\sqrt{e}\sqrt{n}}$$

La suite converge uniformément si et seulement si $\alpha < \dfrac{1}{2}$. Par contre, soit $a < \dfrac{\pi}{2}$ et soit N tel que $\arcsin\sqrt{\dfrac{N}{N+1}} > a$. Alors dès que $n \geq N$, la fonction f_n est croissante sur $[0, a]$ et donc $\sup_{t\leq a} f_n(t) = f_n(a)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite f_n converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle $[0, a]$ (mais pas sur leur réunion $[0, \dfrac{\pi}{2}[$).



A titre d'introduction à ce qui suit, calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\ dt$; on a par un simple changement de variables $u = \sin t$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\ dt = n^\alpha \int_0^1 u^n\ du = \frac{n^\alpha}{n+1}$. On voit donc que bien que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$, la suite $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\, dt$ ne converge vers 0 que si $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, elle converge vers 1, et si $\alpha > 1$, elle converge vers $+\infty$. Autrement dit, si $\alpha \geq 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt$. On voit qu'une convergence simple ne permet pas d'intervertir le symbole limite et le symbole d'intégrale.

10.1.3 Critère de Cauchy uniforme

Définition 10.1.3 *Soit X un ensemble, E un espace métrique. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de X dans E vérifie le critère de Cauchy uniforme si on a*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ p, q \geq N \Rightarrow \forall x \in X,\ d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$$

Remarque 10.1.4 Il est clair que si la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ d'éléments de E est une suite de Cauchy.

Théorème 10.1.2 *Soit X un ensemble, E un espace métrique complet. Alors une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de X dans E est uniformément convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.*

Démonstration Le sens direct se démontre de la manière habituelle et n'utilise pas la complétude de E : si (f_n) converge uniformément vers f, soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \forall x \in X,\ d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si $p, q \geq N$, on a $\forall x \in X,\ d(f_p(x), f_q(x)) \leq d(f_p(x), f(x)) + d(f(x), f_q(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Pour la réciproque, supposons que E est complet et que la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme. D'après la remarque précédente, pour chaque $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ d'éléments de E est une suite de Cauchy, donc elle converge. On pose $f(x) = \lim f_n(x)$. Montrons que la suite converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N \Rightarrow \forall x \in X,\ d(f_p(x), f_q(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons $p \geq N$ et faisons tendre q vers $+\infty$. On obtient, en tenant compte de $\lim f_q(x) = f(x)$ et de la continuité de la fonction distance, $\forall x \in X,\ d(f_p(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, ce qui montre la convergence uniforme vers f.

10.1.4 Fonctions bornées, norme de la convergence uniforme

Soit X un ensemble, E un espace vectoriel normé. On notera $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E. Pour $f \in \mathcal{B}(X, E)$, on posera $\|f\|_\infty = \sup_{t\in X} \|f(t)\| \in \mathbb{R}$.

Proposition 10.1.3 *L'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{B}(X, E)$. Alors la suite (f_n) converge uniformément si et seulement si elle converge dans $(\mathcal{B}(X, E), \|\ \|_\infty)$, avec la même limite.*

Démonstration La vérification des propriétés des normes est élémentaire. Si la suite (f_n) converge dans $(\mathcal{B}(X,E),\| \ \|_\infty)$, soit f sa limite. On a alors $\mu_n = \sup_{x\in X} \|f(x)-f_n(x)\| = \|f-f_n\|_\infty$. On en déduit que la suite converge uniformément vers f. Inversement, si la suite converge uniformément vers $f : X \to E$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \mu_n = \sup_{x\in X} \|f(x)-f_n(x)\| < 1$. La fonction $f - f_N$ est donc bornée ; comme f_N est bornée, la fonction f est également bornée. On a alors $\|f-f_n\|_\infty = \mu_n$, ce qui montre que la suite (f_n) converge vers f dans $(\mathcal{B}(X,E),\| \ \|_\infty)$.

Remarque 10.1.5 On voit en particulier qu'une suite de fonctions bornées qui converge uniformément a une limite qui est également une fonction bornée.

Remarque 10.1.6 Soit (f_n) une suite de $\mathcal{B}(X,E)$. Alors la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme si et seulement si c'est une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(X,E),\| \ \|_\infty)$ (immédiat). On en déduit, d'après un théorème précédent, que si E est complet, $(\mathcal{B}(X,E),\| \ \|_\infty)$ est lui aussi complet.

10.1.5 Opérations sur les fonctions

Bien entendu, les théorèmes de continuité des opérations algébriques s'appliquent immédiatement aux suites simplement convergentes puisque si $f(x) = \lim f_n(x)$ et $g(x) = \lim g_n(x)$, on a $(\alpha f + \beta g)(x) = \lim(\alpha f_n + \beta g_n)(x)$ et $f(x)g(x) = \lim f_n(x)g_n(x)$.

La convergence uniforme est stable par combinaisons linéaires comme le montre le théorème suivant.

Théorème 10.1.4 *Soit X un ensemble, E un espace vectoriel normé. Soit (f_n) et (g_n) deux suites d'applications de X dans E qui convergent uniformément. Soit α et β des scalaires. Alors la suite $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.*

Démonstration Soit $f = \lim f_n$ et $g = \lim g_n$. Soit $\varepsilon > 0$, et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \forall x \in X,\ \|f(x) - f_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)}$$

et

$$\|g(x) - g_n(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)}$$

Alors pour $n \geq N$, on a $\forall x \in X$, $\|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f_n + \beta g_n)(x)\| \leq |\alpha|\dfrac{\varepsilon}{2(1+|\alpha|)} + |\beta|\dfrac{\varepsilon}{2(1+|\beta|)} < \varepsilon$.

Par contre, la convergence uniforme n'est pas stable par produit comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 10.1.4 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$. La suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$. Alors la suite $(f_n g)$ converge simplement vers 0, mais pas uniformément puisque $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = +\infty$. A fortiori, la convergence uniforme d'une suite (f_n) et d'une suite (g_n) n'implique pas la convergence uniforme de la suite $(f_n g_n)$ (prendre $g_n = g$). Cependant, on a le résultat suivant

Théorème 10.1.5 *Soit X un ensemble. Soit (f_n) et (g_n) deux suites d'applications* **bornées** *de X dans K qui convergent uniformément. Alors la suite $(f_n g_n)$ converge uniformément.*

Démonstration Soit $f = \lim f_n$ et $g = \lim g_n$. On sait déjà que f et g sont bornées. On écrit alors

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x) &= (f_n(x) - f(x))(g_n(x) - g(x)) \\ &\quad + f(x)(g_n(x) - g(x)) + g(x)(f_n(x) - f(x)) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f_n(x)g_n(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)|\,|g_n(x) - g(x)| \\ &\quad + |f(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

puis $\|fg - f_n g_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|f\|_\infty \|f - f_n\|_\infty + \|g\|_\infty \|g - g_n\|_\infty$. On obtient donc $\lim \|fg - f_n g_n\|_\infty = 0$ et donc $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

10.1.6 Propriétés de la convergence uniforme

Exemple 10.1.5 Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. La suite f_n converge simplement vers $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$. Chacune des fonctions f_n est continue au point 1, alors que f ne l'est pas. De nouveau, on a $1 = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to 1^-} x^n\right) \neq \lim_{x\to 1^-} \left(\lim_{n\to+\infty} x^n\right) = 0$.

Théorème 10.1.6 (conservation de la continuité) *Soit E et F deux espaces métriques, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans F qui converge simplement vers $f : E \to F$. Soit $a \in E$. On suppose que*

(i) chacune des f_n est continue au point a

(ii) il existe U voisinage de a telle que la suite (f_n) converge uniformément sur U

Alors f est continue au point a.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \forall x \in U,\ d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Comme f_N est continue au point a, il existe V voisinage de a tel que $x \in V \Rightarrow$

$d(f_N(x), f_N(a)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour $x \in U \cap V$, on a $d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) \leq \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Donc f est continue au point a.

Corollaire 10.1.7 *Soit E et F deux espaces métriques, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de E dans F qui converge uniformément vers $f : E \to F$. Alors f est continue.*

Remarque 10.1.7 Il suffit évidemment que tout point ait un voisinage sur lequel la suite converge uniformément, ce que l'on appelle la convergence uniforme locale.

Théorème 10.1.8 (interversion des limites) *Soit E un espace métrique, F un espace métrique complet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E dans F. Soit $a \in E$, $A \subset E$ tel que $a \in \overline{A}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \mathrm{Def}(f_n)$. On suppose que*

- *(i) la suite f_n converge uniformément vers f sur A*
- *(ii) chacune des f_n a une limite ℓ_n en a suivant A*

Alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ et f admet ℓ pour limite en a suivant A, autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a, x\in A} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a, x\in A}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Démonstration Pour montrer que la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ, il suffit de montrer que c'est une suite de Cauchy. Mais, la suite (f_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme sur A. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p, q \geq N \Rightarrow \forall x \in A,\ d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$. Soit $p, q \geq N$; en faisant tendre x vers a en restant dans A, on obtient $d(\ell_p, \ell_q) \leq \varepsilon$ ce qui montre effectivement que la suite (ℓ_n) est une suite de Cauchy de F, donc qu'elle converge.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \forall x \in A,\ d(f(x), f_n(x)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N' \Rightarrow d(\ell_n, \ell) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Soit $n = \max(N, N')$. Comme f_n admet ℓ_n pour limite en a suivant A, il existe U voisinage de a dans E tel que $x \in U \cap A \Rightarrow d(f_n(x), \ell_n) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour $x \in U \cap A$, on a

$$\begin{array}{rcl} d(f(x), \ell) & \leq & d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), \ell_n) + d(\ell_n, \ell) \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{array}$$

ce qui montre que $\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = \ell$.

Remarque 10.1.8 Le résultat suivant s'applique en particulier dans le cas où $a = +\infty$ et $A = \mathbb{N}$, c'est-à-dire au cas d'une suite double $(x_{n,p})$ d'éléments de F : avec les hypothèses

- (i) $\lim_{n\to+\infty} x_{n,p} = y_p$ uniformément par rapport à p
- (ii) $\lim_{p\to+\infty} x_{n,p} = \ell_n$

Alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ et on a $\lim_{p\to+\infty} y_p = \ell$, autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} x_{n,p}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n,p}\right)$$

Exemple 10.1.6 Le résultat précédent utilise de manière essentielle la convergence uniforme par rapport à p comme le montre l'exemple $x_{n,p} = \dfrac{n}{n+p}$ pour lequel on a

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} x_{n,p}\right) \neq \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} x_{n,p}\right) = 1$$

Théorème 10.1.9 (intégration) *Soit (f_n) une suite de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E (espace vectoriel normé complet) qui converge uniformément vers $f : [a,b] \to E$. Alors f est réglée et la suite $(\int_a^b f_n(t)\,dt)$ admet la limite $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais puisque f_N est réglée, il existe $\varphi : [a,b] \to E$ en escalier telle que $\|f_N - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc $\|f - \varphi\|_\infty \leq \|f - f_N\|_\infty + \|f_N - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ ce qui montre que f est encore réglée. On a alors

$$\|\int_a^b f - \int_a^b f_n\| \leq \int_a^b \|f - f_n\| \leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty$$

ce qui montre que la suite $(\int_a^b f_n(t)\,dt)$ admet la limite $\int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque 10.1.9 Comme le montre la démonstration précédente, le fait que l'intervalle soit borné est essentiel. Le résultat précédent ne s'étend donc pas aux intégrales sur des intervalles non bornés (voir pour cela le paragraphe sur les fonctions intégrables). Par contre on a

Corollaire 10.1.10 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions réglées de I dans E (espace vectoriel normé complet) qui converge uniformément vers $f : I \to E$. Alors f est réglée. Soit $a \in I$, $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Alors la suite (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment inclus dans I.*

Démonstration Le théorème précédent montre que f est réglée sur tout segment inclus dans I, donc réglée. De plus, si J est un segment inclus dans I, on peut, quitte à l'agrandir, supposer qu'il contient a. On a alors, pour $x \in J$,

$$\begin{aligned} \|F(x) - F_n(x)\| &\leq \left|\int_a^x \|f(t) - f_n(t)\|\,dt\right| \\ &\leq |x-a|\|f - f_n\|_\infty \leq \ell(J)\|f - f_n\|_\infty \end{aligned}$$

(en travaillant séparément dans les cas $a \leq x$ et $a > x$), ce qui montre la convergence uniforme sur J de F_n vers F.

Par contre, la convergence uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'implique pas que la limite soit elle-même dérivable. C'est même de cette manière, par limite uniforme, qu'ont été construits les premiers exemples de fonctions continues n'admettant de dérivée en aucun point (voir le paragraphe sur les séries de fonctions). Par contre on a

Théorème 10.1.11 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de I dans E (espace vectoriel normé complet) qui converge simplement vers $f : I \to E$. On suppose que*

(i) chacune des f_n est de classe C^1

(ii) la suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g.

Alors f est de classe C^1 et $f' = g$.

Démonstration Soit $a \in I$. Puisque chaque f_n est de classe C^1, on a $\forall x \in I,\ f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\ dt$. D'après le théorème précédent la suite $x \mapsto \int_a^x f_n'(t)\ dt$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers $\int_a^x g(t)\ dt$. On obtient donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, $\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\ dt$. Comme g est continue (limite uniforme de fonctions continues), f est de classe C^1 et $f' = g$.

Remarque 10.1.10 Comme le montre la démonstration précédente, il suffit, avec les mêmes hypothèses, que la suite (f_n) converge en un point a pour qu'elle converge simplement sur I, cette convergence étant d'ailleurs uniforme sur tout segment inclus dans I. On retiendra que, pour montrer la dérivabilité d'une limite de suites de fonctions, il faut s'attacher à la convergence uniforme de la suite des dérivées, et non à celle de la suite elle-même.

10.1.7 Suites de fonctions intégrables sur un intervalle

Remarque 10.1.11 Les théorèmes du type $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ démontrés précédemment ont des hypothèses trop restrictives : ils nécessitent d'une part que l'intervalle soit borné et d'autre part que la suite de fonctions converge uniformément sur tout l'intervalle. La théorie de Lebesgue étend ces théorèmes à des situations plus générales que nous n'étudierons pas en détail, mais d'où nous extrairons un certain nombre de résultats utiles, qui ne seront pas démontrés en toute généralité, mais seulement avec quelques hypothèses supplémentaires.

Nous admettrons le résultat fondamental suivant suivant dont la démonstration est difficile

Lemme 10.1.12 *Soit J un segment de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de J dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant*

(i) il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in J,\ f_n(t) \leq M$

(ii) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0, soit $\forall t \in J,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$

Alors la suite $(\int_J f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On en déduit le lemme suivant

Lemme 10.1.13 (Convergence bornée sur un segment) *Soit J un segment de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de J dans $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers f continue par morceaux. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in J,\ |f_n(t)| \leq M$. Alors la suite $(\int_J f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $\int_J f$.*

Démonstration On pose $g_n(t) = |f(t) - f_n(t)|$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in J,\ |f_n(t)| \leq M$, en passant à la limite on a $|f(t)| \leq M$, soit encore $0 \leq g(t) \leq 2M$. D'autre part, $\forall t \in J$, $\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = 0$. D'après le lemme précédent, on a $\lim \int_J g_n = 0$. Or

$$\left|\int_J f - \int_J f_n\right| = \left|\int_J (f - f_n)\right| \leq \int_J |f - f_n| = \int_J g_n$$

qui tend vers 0. Autrement dit la suite $(\int_J f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $\int_J f$.

Théorème 10.1.14 (convergence dominée) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ continues par morceaux qui converge simplement vers $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On suppose qu'il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination). Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et la suite $(\int_I f_n)$ est convergente de limite $\int_I f$:*

$$\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$$

Démonstration Comme $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ et que φ est intégrable, les fonctions f_n sont intégrables sur I. De plus, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a aussi $|f(t)| \leq \varphi(t)$, donc f est également intégrable sur I. Soit J un segment inclus dans I. On a

$$\begin{aligned}
\left|\int_I f - \int_I f_n\right| &\leq \left|\int_I f - \int_J f\right| + \left|\int_J f - \int_J f_n\right| + \left|\int_J f_n - \int_I f_n\right| \\
&= \left|\int_{I\setminus J} f\right| + \left|\int_J f - \int_J f_n\right| + \left|\int_{I\setminus J} f_n\right| \\
&\leq \int_{I\setminus J} \varphi + \left|\int_J f - \int_J f_n\right| + \int_{I\setminus J} \varphi
\end{aligned}$$

Comme φ est intégrable positive, on a $\int_I \varphi = \sup\{\int_J \varphi \mid J \subset I\}$. Soit donc $\varepsilon > 0$; il existe J segment inclus dans I tel que $\int_I \varphi - \frac{\varepsilon}{3} \leq \int_J \varphi \leq \int_I \varphi$, soit encore $0 \leq \int_{I\setminus J} \varphi \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Fixons un tel segment J ; sur ce segment, la suite f_n converge simplement vers f et $|f_n(t)| \leq \varphi(t)| \leq M$ avec $M = \sup_{t\in J} \varphi(t)$ (qui existe puisque φ est continue par morceaux, donc bornée sur tout segment). Le lemme de convergence bornée sur un segment assure que $\int_J f = \lim_{n\to+\infty} \int_J f_n$; donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \left|\int_J f - \int_J f_n\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour $n \geq N$, on a

$$\left|\int_I f - \int_I f_n\right| \leq 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

ce qui montre bien que la suite $(\int_I f_n)$ est convergente de limite $\int_I f$

Remarque 10.1.12 Il est important de constater que l'hypothèse de domination par une fonction intégrable φ indépendante de n sert non seulement à garantir l'intégrabilité des f_n et de f, mais est également un argument essentiel de la démonstration de $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$, et donc de la validité du résultat. Comme on l'a déjà vu avec la suite de fonctions continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $t \mapsto n^\alpha \sin^{n-1} t \cos t$, une suite de fonctions intégrables peut très bien converger simplement vers une fonction intégrable sans que l'on ait $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$.

Théorème 10.1.15 (convergence monotone) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite croissante de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux et intégrables sur I, qui converge simplement vers $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors la suite $(\int_I f_n)$ est majorée si et seulement si la fonction f est intégrable. Dans ces conditions on a*

$$\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$$

Démonstration En remplaçant éventuellement f_n par $f_n - f_0$ et f par $f - f_0$, on peut supposer que les fonctions f_n sont positives, et donc f également.

Supposons tout d'abord que la fonction f est intégrable. On a alors $\forall t \in I,\ |f_n(t)| = f_n(t) \leq f(t)$, et le théorème de convergence dominée assure que la suite (croissante) $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f$; en particulier elle est majorée.

Supposons en sens inverse que que la suite $(\int_I f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M. Soit J un segment inclus dans I ; on a donc $0 \leq \int_J f_n \leq \int_I f_n \leq M$, mais d'autre part, on a $\forall t \in J,\ |f_n(t)| = f_n(t) \leq f(t)$ et f est intégrable sur le segment J puisqu'elle est continue par morceaux sur ce segment. On a donc $\int_J f = \lim \int_J f_n \leq M$ par le théorème de convergence dominée. Pour tout segment $J \subset I$, on a $\int_J f \leq M$ et f est positive, par définition même, elle est intégrable sur I, ce qui achève la démonstration de l'équivalence

10.2 Séries de fonctions

10.2.1 Différents modes de convergence

Remarque 10.2.1 Soit E un ensemble, F un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans F. On s'intéressera ici à la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$; c'est à la fois, pour chaque $x \in E$, une série d'éléments de F et une suite de fonctions, la suite de ses sommes partielles $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. On peut donc déjà distinguer trois modes possibles de convergence de la série de fonctions.

Définition 10.2.1 *On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'applications de E dans F converge*

(i) simplement sur E si pour chaque $x \in E$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge

(ii) absolument sur E si pour chaque $x \in E$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(x)$ converge absolument (autrement dit la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n(x)\|$ converge)

(iii) uniformément sur E si la suite d'applications de E dans F, $x \mapsto S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} u_p(x)$ converge uniformément sur E

Remarque 10.2.2 Les résultats sur les séries à valeurs dans F montrent que si F est complet, la convergence absolue implique la convergence simple. De même, les résultats sur les suites de fonctions montrent que la convergence uniforme implique la convergence simple. Bien entendu, le critère de Cauchy uniforme peut s'appliquer à des séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé complet, et on obtient

Théorème 10.2.1 *Soit E un ensemble et F un espace vectoriel normé complet. Une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'applications de E dans F est uniformément convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ q \geq p \geq N \Rightarrow \forall x \in E,\ \|\sum_{n=p}^{q} u_n(x)\| < \varepsilon$$

Démonstration C'est tout simplement le critère de Cauchy pour les suites de fonctions en remarquant que $\sum_{n=p}^{q} u_n = S_q - S_{p-1}$.

Remarque 10.2.3 Nous allons introduire un quatrième mode de convergence plus fort que les trois autres, la convergence normale :

Définition 10.2.2 *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *une série d'applications de* E *dans* F*. On dit qu'elle converge normalement si elle vérifie les conditions équivalentes*

(i) chaque u_n *est une application bornée et la série (à termes réels positifs)* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty$ *est convergente*

(ii) il existe une série à termes réels positifs $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ *qui converge et qui vérifie* $\forall x \in E,\ \|u_n(x)\| \leq \alpha_n$.

Démonstration (i)⇒(ii) : prendre $\alpha_n = \|u_n\|_\infty$.

(ii)⇒(i) : il suffit de remarquer que $0 \leq \|u_n\|_\infty \leq \alpha_n$ pour avoir la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty$.

Remarque 10.2.4 Montrer une convergence normale, c'est donc majorer $\|u_n(x)\|$ par une série convergente **indépendante de** x. On constate que la convergence normale n'est autre que la convergence absolue dans $(\mathcal{B}(E,F), \|.\|_\infty)$.

Théorème 10.2.2 *Si* F *est complet, la convergence normale implique à la fois la convergence absolue et la convergence uniforme.*

Démonstration Pour tout $x \in E$, on a $0 \leq \|u_n(x)\| \leq \|u_n\|_\infty$, et donc si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_\infty$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n(x)\|$ converge. Pour montrer la convergence uniforme, puisque F est complet, il suffit de montrer que le critère de Cauchy uniforme est vérifié ; mais on a, pour $x \in E$,

$$\|\sum_{n=p}^{q} u_n(x)\| \leq \sum_{n=p}^{q} \|u_n(x)\| \leq \sum_{n=p}^{q} \|u_n\|_\infty$$

Comme la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $q > p \geq N \Rightarrow \sum_{n=p}^{q} \|u_n\|_\infty < \varepsilon$. Alors

$$q \geq p \geq N \Rightarrow \forall x \in E,\ \|\sum_{n=p}^{q} u_n(x)\| < \varepsilon$$

Exemple 10.2.1 Soit $\alpha > 0$ et soit la série d'applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha(1+nx)}$.
On a $0 \leq \dfrac{1}{n^\alpha(1+nx)} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ série indépendante de x. Cette dernière série converge si $\alpha > 1$ et donc, si $\alpha > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha(1+nx)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Si $\alpha \leq 1$, la série diverge au point 0. Elle ne peut pas converger uniformément sur $]0,+\infty[$, sinon elle vérifierait le critère de Cauchy uniforme et pour $\varepsilon > 0$, il existerait $N \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq p \geq N \Rightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \displaystyle\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n^\alpha(1+nx)} < \varepsilon$; mais alors, pour q et p fixés, en faisant tendre x vers 0 on obtiendrait $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n^\alpha} \leq \varepsilon$, donc la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ convergerait par le critère de Cauchy, ce qui est absurde. Par contre, l'équivalent $\dfrac{1}{n^\alpha(1+nx)} \sim \dfrac{1}{xn^{\alpha+1}} > 0$ montre que si $x > 0$ la série converge (car $\alpha + 1 > 1$). Donc la série converge simplement sur $]0,+\infty[$ (et même absolument puisque c'est une série à termes positifs). Si $a > 0$, on a, pour $x \in [a,+\infty[$, $0 \leq \dfrac{1}{n^\alpha(1+nx)} < \dfrac{1}{n^\alpha(1+na)} \sim \dfrac{1}{an^{\alpha+1}} > 0$, ce qui montre que la série converge normalement sur $[a,+\infty[$.

Remarque 10.2.5 Le même argument utilisant le critère de Cauchy uniforme permet de montrer que si $\sum u_n$ est une série d'applications continues de E dans F (complet) qui converge uniformément sur une partie A de E, alors elle converge encore uniformément sur l'adhérence $\overline{A}$ de A ; la plupart du temps, les convergences uniformes se produisent donc sur des ensembles fermés et toute affirmation d'une convergence uniforme sur une partie non fermée doit immédiatement susciter une inquiétude légitime (même si parfois elle peut être infondée, une ou plusieurs des u_n pouvant ne pas être continue).

10.2.2 Critères supplémentaires de convergence uniforme

A part le critère de Cauchy uniforme, il y a peu de méthodes générales permettant de montrer des convergences uniformes qui ne sont pas des convergences normales. On retiendra cependant les deux cas suivants qui sont importants.

Théorème 10.2.3 (convergence uniforme des séries alternées) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes*

(i) pour chaque $x \in E$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

(ii) la suite (u_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge uniformément sur E.

Démonstration Pour chaque $x \in E$, la série $\sum(-1)^n u_n(x)$ est convergente d'après le théorème sur les séries alternées. De plus si l'on désigne par S_n sa somme partielle d'indice n et par S sa somme, on sait (par le théorème sur les séries alternées) que

$|S(x) - S_n(x)| \leq u_{n+1}(x)$; la convergence uniforme de (u_n) vers la fonction nulle implique donc la convergence uniforme de (S_n) vers S.

Théorème 10.2.4 (critère d'Abel uniforme) *Soit (a_n) une suite d'applications de E dans $\mathbb{R}$ et (u_n) une suite d'applications de E dans l'espace vectoriel normé complet F telles que*

(i) $\exists M \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ \|\sum_{p=0}^{n} u_p(x)\| \leq M$

(ii) la suite (a_n) converge uniformément vers 0 en **décroissant**.

Alors la série $\sum a_n u_n$ converge uniformément

Démonstration On a, en posant $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} u_p(x)$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{q} a_n(x)u_n(x) &= \sum_{n=p}^{q} a_n(x)(S_n(x) - S_{n-1}(x)) \\
&= \sum_{n=p}^{q} a_n(x)S_n(x) - \sum_{n=p}^{q} a_n(x)S_{n-1}(x) \\
&= \sum_{n=p}^{q} a_n(x)S_n(x) - \sum_{n=p-1}^{q-1} a_{n+1}(x)S_n(x) \\
&\quad \text{(changement d'indices } n-1 \mapsto n) \\
&= a_q(x)S_q(x) - a_p(x)S_{p-1}(x) \\
&\quad + \sum_{n=p}^{q-1}(a_n(x) - a_{n+1}(x))S_n(x)
\end{aligned}$$

On a effectué ici une transformation d'Abel. Comme $\forall n,\ \forall x \in E,\ \|S_n(x)\| \leq M$ on a

$$\|\sum_{n=p}^{q} a_n(x)u_n(x)\| \leq M(|a_q(x)| + |a_p(x)| + \sum_{n=p}^{q-1} |a_n(x) - a_{n+1}(x)|) = 2Ma_p(x)$$

en tenant compte de $a_n(x) \geq 0$ et $a_n(x) - a_{n+1}(x) \geq 0$. Comme la suite (a_n) converge uniformément vers 0, la série $\sum a_n u_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, donc elle converge uniformément.

10.2.3 Propriétés de la convergence uniforme

Il suffit d'appliquer à la suite (S_n) d'applications de E dans F les résultats sur les suites de fonctions pour obtenir les théorèmes suivants

Théorème 10.2.5 (conservation de la continuité) *Soit E un espace métrique, F un espace vectoriel normé. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série d'applications de E dans F qui converge simplement, de somme $S : E \to F$, $x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Soit $a \in E$. On suppose que*

(i) chacune des u_n est continue au point a

(ii) il existe U voisinage de a telle que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur U

Alors S est continue au point a.

Démonstration Chacune des u_n étant continue en a, il en est de même de S_n.

Corollaire 10.2.6 *Soit E un espace métrique, F un espace vectoriel normé. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série d'applications continues de E dans F qui converge uniformément. Alors la somme S de la série est continue.*

Remarque 10.2.6 Il suffit évidemment que tout point ait un voisinage sur lequel la série converge uniformément, ce que l'on appelle la convergence uniforme locale.

Théorème 10.2.7 (interversion des limites) *Soit E un espace métrique, F un espace vectoriel normé complet. Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de fonctions de E dans F. Soit $a \in E$, $A \subset E$ tel que $a \in \overline{A}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathrm{Def}(u_n)$. On suppose que*

- *(i) la série $\sum u_n$ converge uniformément sur A ; soit S sa somme*
- *(ii) chacune des u_n a une limite ℓ_n en a suivant A*

Alors la série $\sum \ell_n$ converge et $x \mapsto S(x)$ admet $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$ pour limite en a suivant A, autrement dit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x\to a, x\in A} u_n(x) \right) = \lim_{x\to a, x\in A} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right)$$

Démonstration Il suffit de remarquer que $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ admet la limite $\sum_{p=0}^{n} \ell_p$ en a suivant A et d'appliquer le théorème d'interversion des limites à la suite (S_n).

Remarque 10.2.7 Le résultat suivant s'applique en particulier dans le cas où $a = +\infty$ et $A = \mathbb{N}$, c'est-à-dire au cas d'une suite double $(x_{n,p})$ d'éléments de E : avec les hypothèses

- (i) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{n,p}$ converge uniformément par rapport à p
- (ii) $\lim_{p\to+\infty} x_{n,p} = \ell_n$

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} x_{n,p}\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{n,p}\right)$$

Exemple 10.2.2 Le résultat précédent utilise de manière essentielle la convergence uniforme par rapport à p comme le montre l'exemple $x_{n,p} = \frac{n}{n+p} - \frac{n-1}{n+p-1} = \frac{p}{(n+p)(n+p-1)}$ pour lequel on a

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} x_{n,p}\right) \neq \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_{n,p}\right) = 1$$

Théorème 10.2.8 (intégration) *Soit $\sum u_n$ une suite de fonctions réglées de $[a,b]$ dans E (espace vectoriel normé complet) qui converge uniformément sur $[a,b]$, de somme $S : [a,b] \to E$. Alors S est réglée et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b u_n(t)\ dt$ converge, de somme $\int_a^b S(t)\ dt$, autrement dit $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b u_n(t)\ dt$ (interversion du signe somme et du signe intégrale).*

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème correspondant sur les suites de fonctions en remarquant que S_n est réglée et que $\int_a^b S_n(t)\ dt = \sum_{p=0}^{n}\int_a^b u_p(t)\ dt$

Remarque 10.2.8 Comme pour les suites de fonctions, le fait que l'intervalle soit borné est essentiel. Le résultat précédent ne s'étend donc pas aux intégrales impropres sur des intervalles non bornés. Par contre on a

Corollaire 10.2.9 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\sum u_n$ une suite de fonctions réglées de I dans E (espace vectoriel normé complet) qui converge uniformément sur I, de somme $S : I \to E$. Alors S est réglée. Soit $a \in I$, $U_n(x) = \int_a^x u_n(t)\ dt$ et $U(x) = \int_a^x S(t)\ dt$. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I et elle admet U pour somme.*

La convergence uniforme d'une série de fonctions dérivables n'implique pas que la somme soit elle-même dérivable. C'est même de cette manière, par limite uniforme, qu'ont été construits les premiers exemples de fonctions continues n'admettant de dérivée en aucun point (voir ci-dessous). Par contre on a

Théorème 10.2.10 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\sum u_n$ une suite d'applications de I dans E qui converge simplement sur I, de somme $S : I \to E$. On suppose que*

(i) chacune des u_n est de classe C^1

(ii) la série $\sum u'_n$ converge uniformément sur I

Alors S est de classe C^1 et $\forall x \in I,\ S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x)$.

Démonstration Il suffit de remarquer que les S_n sont de classe C^1 et que $S'_n(x) = \sum_{p=0}^{n} u'_p(x)$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème correspondant sur les suites de fonctions.

Remarque 10.2.9 Comme pour les suites de fonctions, il suffit, avec les mêmes hypothèses, que la suite $\sum u_n$ converge en un point a pour qu'elle converge simplement sur I, cette convergence étant d'ailleurs uniforme sur tout segment inclus dans I. On retiendra donc, que pour montrer la dérivabilité d'une somme de série de fonctions, il faut s'attacher à la convergence uniforme de la série des dérivées, et non à celle de la série elle-même.

Exemple 10.2.3 Etude de la fonction ζ de Riemann : on pose, pour $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Pour $a > 1$ et $x \in [a, +\infty[$, on a $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ qui est une série convergente indépendante de a. Donc la série converge normalement sur $[a, +\infty[$ et la fonction ζ est continue sur $[a, +\infty[$ quel que soit $a > 1$; elle est donc continue sur $]1, +\infty[$. La fonction $x \to \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ et sa dérivée p-ième est $\frac{(-1)^p(\log n)^p}{n^x}$. Si $a > 1$, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^p(\log n)^p}{n^x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ (car $\left|\frac{(-1)^p(\log n)^p}{n^x}\right| \leq \frac{(\log n)^p}{n^a}$ qui est une série de Bertrand convergente, indépendante de x) et donc ζ est de classe C^p sur $[a, +\infty[$ avec $\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(\log n)^p}{n^x}$. Comme a est quelconque avec $a > 1$, ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et on a la formule ci-dessus.

Exemple 10.2.4 Nous allons donner un exemple de fonction continue sur un intervalle, qui n'est dérivable en aucun point. Posons pour cela $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ avec $0 < a < 1$ et b entier multiple de 4. La majoration $|a^n cos(b^n \pi x)| \leq a^n$ montre que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme est donc une fonction continue sur

$\mathbb{R}$. On a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\cos(b^n\pi(x+h)) - \cos(b^n\pi x)}{h}$. Prenons en particulier $h = \dfrac{1}{b^p}$ où p est un entier. On a alors,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \frac{\cos(b^n\pi x + b^n h\pi) - \cos(b^n\pi x)}{h} \\
&= \sum_{n=0}^{p} a^n \frac{\cos(b^n\pi x + b^n h\pi) - \cos(b^n\pi x)}{h}
\end{aligned}$$

car $b^n h = b^{n-p}$ est un entier pair pour $n > p$. On peut donc écrire $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = S_{p-1} - 2b^p a^p \cos(b^p\pi x)$ avec

$$\begin{aligned}
|S_{p-1}| &= \left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\cos(b^n\pi x + b^n h\pi) - \cos(b^n\pi x)}{h}\right| \\
&= 2\left|\sum_{n=0}^{p-1} a^n \frac{\sin(b^n\pi x + \frac{b^n h\pi}{2})\sin(\frac{b^n h\pi}{2})}{h}\right| \\
&\leq 2\sum_{n=0}^{p-1} a^n \left|\frac{\sin(\frac{b^n h\pi}{2})}{h}\right| \\
&< \pi\sum_{n=0}^{p-1} b^n a^n
\end{aligned}$$

en utilisant $|\sin x| < x$ pour $x > 0$. Supposons a et b choisis de telle sorte que $ba - 1 > 2\pi$; on a alors $|S_{p-1}| < \pi\dfrac{b^p a^p - 1}{ba-1} < \pi\dfrac{b^p a^p}{ba-1}$ et donc $S_{p-1} = \varepsilon_p b^p a^p$ avec $|\varepsilon_p| < \dfrac{1}{2}$. On a alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^p b^p(\varepsilon_p - 2\cos(b^p\pi x))$. En suivant la même méthode on peutécrire $\dfrac{f(x+\frac{h}{2})-f(x)}{\frac{h}{2}} = a^p b^p(\eta_p - 2\sqrt{2}\cos(b^p\pi x + \dfrac{\pi}{4}))$ avec $|\eta_p| < \dfrac{1}{2}$. Mais les deux nombres $b^p\pi x$ et $b^p\pi x + \dfrac{\pi}{4}$ différant de $\dfrac{\pi}{4}$, l'un des deux cosinus au moins est en valeur absolue supérieur à $\sin\dfrac{\pi}{8}$ (exercice facile), et donc on a soit $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geq a^p b^p(2\sin\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2})$, soit $\left|\dfrac{f(x+\frac{h}{2})-f(x)}{\frac{h}{2}}\right| \geq a^p b^p(2\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2})$. Comme $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} b^p a^p = +\infty$, on a donc $\displaystyle\limsup_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = +\infty$, donc f n'est pas dérivable au point x.

10.2.4 Séries de fonctions intégrables sur un intervalle

Remarque 10.2.10 Comme pour les suites de fonctions, les théorèmes du type $\sum \int u_n = \int \sum u_n$ démontrés précédemment ont des hypothèses trop restrictives : ils nécessitent d'une part que l'intervalle soit borné et d'autre part que la série de fonctions converge uniformément sur tout l'intervalle. La théorie de Lebesgue étend également ces théorèmes à des situations plus générales d'où nous extrairons un certain nombre de résultats utiles.

Théorème 10.2.11 (convergence monotone) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ positives, continues par morceaux et intégrables sur I ; on suppose que la série converge simplement sur I et que sa somme $S = \sum u_n$ est continue par morceaux. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I u_n$ converge si et seulement si la fonction S est intégrable. Dans ces conditions on a*

$$\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

Démonstration Il suffit d'appliquer le théorème de convergence monotone pour les suites de fonctions à la suite $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. C'est une suite croissante de fonctions positives, intégrables et continues par morceaux qui converge simplement vers S. Donc la suite des intégrales $\int_I S_n = \sum_{p=0}^{n} \int_I u_p$ converge si et seulement si S est intégrable et dans ce cas $\int_I S = \lim \int_I S_n$; donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I u_n$ converge si et seulement si la fonction S est intégrable et dans ces conditions on a

$$\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$$

Théorème 10.2.12 (intégration terme à terme) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ continues par morceaux et intégrables sur I ; on suppose que la série converge simplement sur I et que sa somme $S = \sum u_n$ est continue par morceaux. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |u_n|$ est convergente, alors S est intégrable sur I, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I u_n$ converge et on a à la fois*

$$\int_I S = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n \quad \text{et} \quad \int_I |S| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n|$$

Démonstration Soit $S_n : I \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k(t)$, $M_n : I \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \sum_{k=0}^{n} |u_k(t)|$ et $h_n : I \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \min(|S(t)|, M_n(t))$. La formule classique $\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$ montre que h_n est continue par morceaux. Puisque chacune des fonctions $|u_k|$ est intégrable sur I, il en est de même de M_n et donc de h_n qui est dominée par M_n ; on a aussi

$$\int_I h_n \leq \int_I M_n = \sum_{k=0}^{n} \int_I |u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |u_k|$$

Comme $M_{n+1}(t) \geq M_n(t)$, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Fixons $t \in I$ et $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |S(t) - S_n(t)| < \varepsilon$; on a alors, pour $n \geq N$, $|S(t)|-\varepsilon \leq |S_n(t)| \leq M_n(t)$ et donc $|S(t)|-\varepsilon \leq h_n(t) = \min(|S(t)|, M_n(t)) \leq |S(t)|$, ce qui montre que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $|S|$, qui est continue par morceaux. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone à la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $|S|$ est intégrable avec $\int_I |S| = \lim \int_I h_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |u_k|$. On en conclut que S est intégrable et que $\left|\int_I S\right| \leq \int_I |S| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |u_k|$.

On applique ce que l'on vient de démontrer à la série $\sum_{p\geq n+1} u_p$ et l'on obtient

$$\left|\int_I S - \sum_{k=0}^{n} \int_I u_k\right| = \left|\int_I (S - \sum_{k=0}^{n} u_k)\right| = \left|\int_I \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_I |u_k|$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (reste d'une série convergente). On a donc $\int_I S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I u_k$.

Remarque 10.2.11 Il est important de constater que l'hypothèse de convergence de la série $\sum_n \int_I |u_n|$ sert non seulement à garantir l'intégrabilité de S et la convergence (absolue) de la série $\sum_n \int_I u_n$, mais est également un argument essentiel de la démonstration de $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$, et donc de la validité du résultat. La série $\sum u_n$ peut très bien converger avec une somme intégrable, la série $\sum \int_I u_n$ convergeant (même absolument) sans que l'on ait $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n$

10.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

10.3.1 Position du problème

Soit E un espace métrique, $a, b \in \mathbb{R}$, E' un espace vectoriel normé complet et $f : E \times [a, b] \to E'$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$. On suppose que $\forall x \in E$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est réglée de $[a, b]$ dans E'. On peut donc définir une application $F : E \to E'$ par $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$. Nous allons nous intéresser ici aux propriétés de la fonction F (continuité, dérivabilité, intégration) en fonction de celles de f.

10.3.2 Continuité

Théorème 10.3.1 (Continuité par convergence dominée) *Soit E un espace métrique, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : E \times I \to \mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$. On suppose*

(i) pour chaque $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I

(ii) pour chaque $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur E

(iii) il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable, telle que $\forall (x, t) \in E \times I,\ |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors, pour tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I et l'application $F : E \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_I f(x, t)\, dt$ est continue sur E.

Démonstration L'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ est claire avec la majoration $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$. Soit alors $x \in E$ et (x_n) une suite de E de limite x. Posons $g_n(t) = f(x_n, t)$ et $g(t) = f(x, t)$. La suite (g_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur I qui converge vers g continue par morceaux et on a $|g_n| \leq \varphi$ avec φ intégrable ; le théorème de convergence dominée assure que $\lim \int_I g_n = \int_I g$ soit encore $\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = F(x)$. Donc F est bien continue.

Remarque 10.3.1 Pour montrer que F est continue, il suffit de montrer que sa restriction à tout compact K contenu dans E est continue, donc qu'à tout compact K contenu dans E, on peut associer une fonction φ_K intégrable telle que $\forall (x, t) \in K \times I,\ |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$.

Corollaire 10.3.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : U \times [a, b] \to \mathbb{C}$ continue, $(x, t) \mapsto f(x, t)$. Alors l'application $F : U \to \mathbb{C}$ définie par $F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$ est continue.*

Démonstration Soit $x_0 \in U$ et $r > 0$ tel que la boule fermée $B'(x_0, r)$ soit contenue dans U. La fonction f est continue sur le compact $B'(x_0, r) \times [a, b]$, donc elle y est bornée : soit $M \geq 0$ tel que $\forall (x, t) \in B'(x_0, r) \times [a, b],\ |f(x, t)| \leq M$. Comme la fonction constante $t \mapsto M$ est intégrable sur $[a, b]$ et bien entendue indépendante de x, le théorème de continuité par convergence dominée montre que F est continue sur $B'(x_0, r)$ et en particulier qu'elle est continue au point x_0.

Exemple 10.3.1 Soit $0 < a < b < +\infty$ et soit $\Gamma_{a,b}(x) = \displaystyle\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\ dt$. On a ici, $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = \exp(-t-(x-1)\log t)$ qui est une fonction continue de $\mathbb{R}\times[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues). On en déduit que $\Gamma_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

10.3.3 Dérivabilité

Nous supposerons ici que $E = I$ intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $t_0 \in [a,b]$; lorsque l'application $x \mapsto f(x,t_0)$ est dérivable en un point $x_0 \in I$, sa dérivée au point x_0 sera notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)$.

Théorème 10.3.3 (Dérivabilité par convergence dominée) *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : J\times I \to \mathbb{C}$, $(x,t) \to f(x,t)$ continue, admettant une dérivée partielle par rapport à x, $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, continue sur $J\times I$. On suppose que pour tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et qu'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, intégrable, telle que $\forall (x,t) \in J\times I$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \le \varphi(t)$ (hypothèse de domination). Alors, l'application $F : J \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\ dt$ est de classe C^1 sur J et*

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$$

Démonstration L'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est claire avec la majoration $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \le \varphi(t)$. Soit alors $x \in J$ et x_n une suite de $J \setminus \{x\}$ de limite x. Posons $g_n(t) = \dfrac{f(x,t)-f(x_n,t)}{x-x_n}$ et $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$. La suite (g_n) est une suite de fonctions continues sur I qui converge vers g continue. L'inégalité des accroissements finis assure que $|f(x,t)-f(x_n,t)| \le |x-x_n| \displaystyle\sup_{y\in]x,x_n[}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\right| \le |x-x_n|\varphi(t)$, d'où

$$|g_n(t)| = \left|\frac{f(x,t)-f(x_n,t)}{x-x_n}\right| \le \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Le théorème de convergence dominée assure alors que $\lim \displaystyle\int_I g_n = \int_I g$, soit encore que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$. Comme la suite (x_n) est quelconque, on a

$$\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{t-x} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt$$

donc F est dérivable et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$. La continuité de F' relève du théorème précédent relatif à la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, la fonction étant dominée indépendamment du paramètre.

Corollaire 10.3.4 *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : J \times I \to \mathbb{C}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ continue, admettant des dérivées partielles par rapport à x, $(x,t) \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$, continues sur $J \times I$, $i = 1, \ldots, k$. On suppose que pour tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et qu'il existe des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_k : I \to \mathbb{R}^+$, intégrables, telles que $\forall (x,t) \in J \times I$, $|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)| \leq \varphi_i(t)$ (hypothèses de domination). Alors, l'application $F : J \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_I f(x,t)\, dt$ est de classe C^k sur J et*

$$\forall i \in [1,k],\ \forall x \in J,\ F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\, dt$$

Démonstration Récurrence évidente à partir du théorème précédent

Théorème 10.3.5 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$. On suppose que*

(i) Pour chaque $x \in I$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[a,b]$

(ii) Pour chaque $(x,t) \in I \times [a,b]$, f admet une dérivée partielle par rapport à x, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et que l'application $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue.

Alors $F : I \Rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dt$ est de classe C^1 et $\forall x_0 \in I$, $F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\, dt$.

Démonstration Il suffit, comme dans le théorème correspondant de continuité pour une intégrale dépendant d'un paramètre sur un segment, de prendre $x_0 \in I$, un segment K, voisinage de x_0 dans I, et d'utiliser le fait que la fonction $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue, donc bornée par un certain M sur le compact $K \times [a,b]$. La fonction constante M ainsi introduite est intégrable sur le segment $[a,b]$ et fournit ainsi une fonction dominante de la fonction $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur $K \times [a,b]$. Par le théorème de dérivation par convergence dominée, F est dérivable sur K et en particulier elle est dérivable au point x_0 avec $F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\, dt$.

Exemple 10.3.2 Soit $0 < a < b < +\infty$ et soit $\Gamma_{a,b}(x) = \int_a^b t^{x-1}e^{-t}\, dt$. On a ici, $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = \exp(-t + (x-1)\log t)$ qui admet une dérivée par rapport à x,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \log t \; t^{x-1}e^{-t}$ qui est une fonction continue de $\mathbb{R} \times [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ (composée de fonctions continues). On en déduit que $\Gamma_{a,b}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\Gamma'_{a,b}(x) = \displaystyle\int_a^b t^{x-1} \log t \; e^{-t} \, dt$. Une récurrence évidente montrera alors que $\Gamma_{a,b}$ est de classe C^∞ et que $\Gamma_{a,b}^{(n)}(x) = \displaystyle\int_a^b t^{x-1}(\log t)^n e^{-t} \, dt$.

10.3.4 Théorème de Fubini sur un produit de segments

Théorème 10.3.6 (Fubini sur un produit de segments) *Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ continue. Alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) \, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \, dx \right) \, dy$$

Démonstration On va démontrer que $\forall t \in [a,b]$, $F(t) = G(t)$ où $F(t) = \displaystyle\int_a^t \left(\int_c^d f(x,y) \, dy \right) \, dx$ et $G(t) = \displaystyle\int_c^d \left(\int_a^t f(x,y) \, dx \right) \, dy$. Pour $t = b$, on aura alors le résultat voulu. Comme $F(a) = G(a) = 0$, il suffit de démontrer que F et G sont dérivables et que $F' = G'$. Mais on a $F(t) = \displaystyle\int_a^t \varphi(x) \; dx$ avec $\varphi(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y) \; dy$. Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un segment (conséquence du théorème de continuité par convergence dominée) assure que φ est continue, donc que F est dérivable et que $F'(t) = \varphi(t) = \displaystyle\int_c^d f(t,y) \, dy$.

On a aussi $G(t) = \displaystyle\int_c^d \psi(t,y) \, dy$ avec $\psi(t,y) = \displaystyle\int_a^t f(x,y) \, dx$. Comme $x \mapsto f(x,y)$ est continue, $t \mapsto \psi(t,y)$ est de classe C^1 et $\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) = f(t,y)$. Mais f étant continue sur le compact $[a,b] \times [c,d]$, elle y est bornée et on a donc

$$\forall (t,y) \in [a,b] \times [c,d], \; \left| \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) \right| \le \|f\|_\infty$$

qui est une fonction (constante) de la variable y, intégrable sur $[c,d]$ et indépendante de t. Le théorème de dérivation par convergence dominée assure que l'application $G : t \mapsto \displaystyle\int_c^d \psi(t,y) \; dy$ est dérivable et que $G'(t) = \displaystyle\int_c^d \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,y) \; dy$, soit encore $G'(t) = \displaystyle\int_c^d f(t,y) \, dy = \varphi(t) = F'(t)$, ce qui achève la démonstration.

10.3.5 Intégrales sur un pavé ou un rectangle

Définition 10.3.1 *On appelle pavé de $\mathbb{R}^2$ (resp. rectangle de $\mathbb{R}^2$) toute partie de $\mathbb{R}^2$ de la forme $[a,b] \times [c,d]$ (resp $I \times I'$ où I et I' sont des intervalles de $\mathbb{R}$).*

En appliquant le théorème de Fubini pour une fonction continue sur un produit de segments, on est amené à donner la définition suivante :

Définition 10.3.2 *Soit $P = [a,b] \times [c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle intégrale de la fonction f sur le pavé P le nombre complexe noté indifféremment $\iint_P f$ ou $\iint_P f(x,y)\,dx\,dy$ défini par*

$$\iint_P f = \iint_P f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

On peut alors répéter les définitions et résultats qui nous ont permis de définir les fonctions intégrables sur un intervalle à partir de l'intégrale sur un segment, pour définir des fonctions intégrables sur un rectangle à partir de la notion de intégrale sur un pavé. On donnera donc les définitions et propriétés suivantes sans commentaire ou démonstration.

- Soit R un rectangle et $f : R \to \mathbb{R}$ continue positive. On dit que f est intégrable sur R s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout pavé $P \subset R$ on ait $\iint_P f \leq M$. On pose alors $\iint_R f = \sup_{P \subset R} f$; on montre que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de pavés contenus dans R dont la réunion est R, alors $\iint_R f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{P_n} f$.
- Soit R un rectangle et $f : R \to \mathbb{C}$ continue. On dit que f est intégrable sur R si la fonction continue positive $|f|$ est intégrable sur R ; on montre alors que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de pavés contenus dans R dont la réunion est R, la suite $\left(\iint_{P_n} f \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est indépendante du choix de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on pose donc $\iint_R f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{P_n} f$.
- L'ensemble des fonctions continues de R dans $\mathbb{C}$ intégrables sur R est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues et l'application $f \mapsto \iint_R f$ est linéaire.
- Si un rectangle R est la réunion de deux rectangles R_1 et R_2 ne se rencontrant que suivant un de leurs côtés, alors f est intégrable sur R si et seulement si elle est intégrable sur R_1 et R_2 et dans ce cas, $\iint_R f = \iint_{R_1} f + \iint_{R_2} f$.

On utilisera plusieurs fois le lemme suivant

Lemme 10.3.7 *Soit R et R' deux rectangles tels que $R \subset R'$ et soit $f : R' \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur R'. Alors f est intégrable sur R et*

$$\left| \iint_{R'} f - \iint_R f \right| \leq \iint_{R'} |f| - \iint_R |f|$$

Démonstration Tout pavé P inclus dans R est inclus dans R' et donc $\sup_{P\subset R} \iint_P |f| \leq \sup_{P\subset R'} \iint_P |f| = \iint_{R'} |f| < +\infty$ ce qui garantit l'intégrabilité de f sur R. De plus (avec quelques conventions d'écritures évidentes pour l'intégrale sur la différence de deux rectangles)

$$\left|\iint_{R'} f - \iint_R f\right| = \left|\iint_{R'\setminus R} f\right| \leq \iint_{R'\setminus R} |f| \leq \iint_{R'} |f| - \iint_R |f|$$

Lemme 10.3.8 *Soit $R = I\times I'$ un rectangle, $f : R \to \mathbb{C}$ une fonction continue, intégrable sur R. Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites croissantes de segments dont les réunions sont respectivement I et I'. Alors*

$$\iint_R f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{I\times K_n} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{J_n\times I'} f$$

Démonstration *Premier cas :* f est à valeurs réelles positives. On a alors

$$\iint_{J_n\times K_n} f \leq \iint_{I\times K_n} f \leq \iint_{I\times I'} f$$

et comme $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{J_n\times K_n} f$ (les $J_n \times K_n$ forment une suite croissante de pavés dont la réunion est $I \times I'$), on a $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{I\times K_n} f$. On démontre l'autre formule de manière similaire.

Deuxième cas : f est à valeurs complexes. On remarque que, d'après le lemme précédent

$$\left|\iint_{I\times I'} f - \iint_{I\times K_n} f\right| \leq \iint_{I\times I'} |f| - \iint_{I\times K_n} |f|$$

qui tend vers 0 d'après le premier cas. Donc $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{I\times K_n} f$. On démontre l'autre formule de manière similaire.

10.3.6 Théorème de Fubini sur un produit d'intervalles

Lemme 10.3.9 *Soit I' un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \times I' \to \mathbb{C}$ continue. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) pour tout $x \in [a,b]$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I'

(ii) l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_{I'} f(x,y)\,dy$ est continue par morceaux sur $[a,b]$

(iii) f est intégrable sur le rectangle $[a,b] \times I'$

Alors $\displaystyle\iint_{[a,b]\times I'} f = \int_a^b g = \int_a^b \left(\int_{I'} f(x,y)\,dy\right) dx.$

Démonstration Soit K_n une suite croissante de segments dont la réunion est I'. On sait que

$$\iint_{[a,b]\times I'} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{[a,b]\times K_n} f = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \left(\int_{K_n} f(x,y)\ dy \right) dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)\ dx$$

en posant $g_n(x) = \displaystyle\int_{K_n} f(x,y)\ dy$; le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un segment nous garantit que g_n est continue ; de plus, comme la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I', la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g et on peut écrire

$$\begin{aligned} |g_{n+1}(x) - g_n(x)| &= \left| \int_{K_{n+1}} f(x,y)\ dy - \int_{K_n} f(x,y)\ dy \right| \\ &= \left| \int_{K_{n+1}\setminus K_n} f(x,y)\ dy \right| \le \int_{K_{n+1}\setminus K_n} |f(x,y)|\ dy \\ &= \int_{K_{n+1}} |f(x,y)|\ dy - \int_{K_n} |f(x,y)|\ dy \end{aligned}$$

Posons $u_n = \displaystyle\int_a^b \left(\int_{K_n} |f(x,y)|\ dy \right) dx$. En intégrant l'inégalité ci-dessus de a à b, on obtient

$$\int_a^b |g_{n+1}(x) - g_n(x)|\ dx \le \int_a^b \left(\int_{K_{n+1}} |f(x,y)|\ dy \right) - \int_a^b \left(\int_{K_n} |f(x,y)|\ dy \right) = u_{n+1} - u_n$$

Mais $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$ qui admet la limite $\displaystyle\iint_{[a,b]\times I'} |f|$. Donc la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, et par conséquent, il en est de même de la série $\displaystyle\sum \int_a^b |g_{n+1}(x) - g_n(x)|\ dx$. Le théorème d'intégration termes à termes pour les séries de fonctions assure que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b (g_{n+1} - g_n) = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} (g_{n+1} - g_n) = \int_a^b (g - g_0)$$

Mais

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int_a^b (g_{n+1} - g_n) = \int_a^b g_N - \int_a^b g_0$$

Autrement dit on a $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \left(\int_a^b g_N - \int_a^b g_0 \right) = \int_a^b (g - g_0)$, soit encore $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_a^b g_N = \int_a^b g$, c'est à dire $\displaystyle\iint_{[a,b]\times I'} f = \int_a^b f$, ce que nous cherchions à démontrer.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un premier théorème reliant l'intégrale sur un rectangle et les intégrales partielles sur les intervalles projections de ce rectangle sur les deux axes.

Théorème 10.3.10 *Soit $R = I \times I'$ un rectangle, $f : R \to \mathbb{C}$ continue. On suppose que*

(i) f est intégrable sur R

(ii) pour tout $x \in I$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I'

(iii) les applications $x \mapsto \displaystyle\int_{I'} |f(x,y)|\ dy$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_{I'} f(x,y)\ dy$ sont continues par morceaux sur I

Alors g est intégrable sur I et $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \int_I g = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\ dy\right) dx$.

Démonstration Soit J un segment inclus dans I. D'après le lemme précédent dont les hypothèses sont évidemment vérifiées,

$$\int_J |g| = \int_I \left|\int_{I'} f(x,y)\ dy\right|\ dx \le \int_J \left(\int_{I'} |f(x,y)|\ dy\right)\ dx = \iint_{J\times I'} |f| \le \iint_{I\times I'} |f|$$

ce qui garantit que g est intégrable sur I.

Soit maintenant $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de segments dont la réunion est I. Alors, en combinant les deux lemmes précédents, on a

$$\iint_{I\times I'} f = \lim_{n\to+\infty} \iint_{J_n\times I'} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} g = \int_I g$$

ce que nous voulions démontrer.

Nous allons en déduire un théorème nous permettant d'intervertir les signes d'intégration sur des intervalles.

Théorème 10.3.11 *Soit I et I' deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times I' \to \mathbb{C}$ continue. On suppose que*

(i) pour tout $x \in I$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I'

(ii) pour tout $y \in I'$, $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur I et l'application $y \mapsto \displaystyle\int_I f(x,y)\ dx$ est continue par morceaux

(iii) l'application $x \mapsto \displaystyle\int_{I'} f(x,y)\ dy$ est continue par morceaux sur I et $x \mapsto \displaystyle\int_{I'} |f(x,y)|\ dy$ est continue par morceaux et intégrable sur I

Alors l'application $y \mapsto \displaystyle\int_I f(x,y)\ dx$ est intégrable sur I' et on a

$$\int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\ dy\right) dx = \int_{I'} \left(\int_I f(x,y)\ dx\right) dy$$

Démonstration Soit $P = J \times K$ un pavé contenu dans $I \times I'$. On a alors

$$\iint_{J\times K} |f| = \int_J \left(\int_K |f(x,y)|\ dy\right) dx \le \int_J \left(\int_{I'} |f(x,y)|\ dy\right) dx \le \int_I \left(\int_{I'} |f(x,y)|\ dy\right) dx$$

ce qui montre que $|f|$ est intégrable sur le rectangle $I \times I'$. Il en est donc de même pour f.

Le théorème précédent assure que l'application $x \mapsto \int_{I'} f(x,y)\, dy$ est intégrable sur I et que

$$\iint_{I\times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\, dy\right) dx$$

On applique à nouveau le théorème précédent en intervertissant le rôle de I et I', donc des variables x et y. On obtient que l'application $y \mapsto \int_I f(x,y)\, dx$ est intégrable sur I et que $\int_{I'} \left(\int_I f(x,y)\, dx\right) dy = \iint_{I\times I'} f$ ce qui nous donne l'égalité recherchée.

Remarque 10.3.2 Moyennant la vérification que toutes les fonctions intégrées sont continues par morceaux, on pourra retenir ce théorème sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} \int_I \left(\int_{I'} |f(x,y)|\, dy\right) dx < +\infty \\ \forall y \in E,\ \int_I |f(x,y)|\, dx < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_I \left(\int_{I'} f(x,y)\, dy\right) dx = \int_{I'} \left(\int_I f(x,y)\, dx\right) dy$$

10.3.7 La fonction Γ

Définition 10.3.3 *Pour $x \in]0,+\infty[$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.*

Démonstration En $+\infty$, $t^{x-1}e^{-t} = o(\frac{1}{t^2})$ donc la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$. En 0, on a $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1} > 0$ donc la fonction est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x > 0$. La fonction Γ est donc définie pour $x > 0$.

Proposition 10.3.12 *La fonction Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^k e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Démonstration Soit $0 < a < 1 < b < +\infty$ et posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ pour $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$. Soit $J = [a,b]$ et $I =]0,+\infty[$; la fonction $f : J \times I \to \mathbb{C}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue et admet des dérivées partielles par rapport à x, $(x,t) \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) = (\log t)^i e^{-t} t^{x-1}$, continues sur $J \times I$, $i = 1,\ldots,k$. Soit $\varphi_i :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} |\log t|^i e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \in]0,1] \\ (\log t)^i e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Alors φ_i est continue par morceaux, intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\right| \leq \varphi_i(t)$$

D'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ est de classe C^k sur $[a,b]$ et $\Gamma^{(i)}(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\,dt$. Comme a et b sont quelconques, le résultat reste valide sur la réunion des intervalles $[a,b]$, donc Γ est de classe C^k sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^k e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Proposition 10.3.13 *Pour tout* $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. *En particulier* $\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$.

Démonstration Soit $0 < a < b < +\infty$. On a par une intégration par parties

$$\int_a^b e^{-t} t^x\,dt = \left[-e^{-t}t^x\right]_a^b + x\int_a^b e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

Il suffit alors de faire tendre a vers 0 et b vers $+\infty$; le crochet admet la limite 0 et on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma(1) = 1$, une récurrence immédiate donne $\Gamma(n+1) = n!$.

Proposition 10.3.14 $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

Démonstration Soit $0 < a < b < +\infty$. Le changement de variable $t = u^2$ donne

$$\int_a^b e^{-t} t^{-1/2}\,dt = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} e^{-u^2}\,du$$

Il suffit alors de faire tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, pour avoir $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$. La valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ de cette dernière intégrale sera admise (démontrée en exercice).

10.3.8 Méthodes directes

En ce qui concerne la continuité et la dérivabilité de F, on peut aussi tenter de majorer directement les expressions $F(x) - F(x_0) = \int_a^b (f(x,t) - f(x_0,t))\,dt$ et $F(x) - F(x_0) - (x-x_0)\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,dt = \int_a^b \left(f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right)dt$ en utilisant en particulier l'inégalité des accroissements finis et l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 qui nous donneront, moyennant des hypothèses raisonnables,

$$\|f(x,t) - f(x_0,t)\| \leq |x - x_0| \sup_{y\in[x_0,x]} \|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\|$$

et

$$\|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\| \\ \leq \frac{|x-x_0|^2}{2} \sup_{y\in[x_0,x]} \|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(y,t)\|$$

Des méthodes directes similaires peuvent être utilisées pour l'intégration.

Exemple 10.3.3 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-tx}\, dt$. Il est clair que la fonction est intégrable pour $x > 0$. Montrons que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. On a, pour $x_0 > 0$ et $x > \dfrac{x_0}{2}$

$$e^{-tx} - e^{-tx_0} + (x-x_0)te^{-tx_0} = \frac{(x-x_0)^2}{2} t^2 e^{-t\xi},\ \xi \in [x_0, x]$$

en appliquant la formule de Taylor Lagrange à l'application $y \mapsto e^{-ty}$ sur $[x_0, x]$ (ou $[x, x_0]$), soit encore $|e^{-tx} - e^{-tx_0} + (x-x_0)te^{-tx_0}| \leq \dfrac{(x-x_0)^2}{2} t^2 e^{-\frac{tx_0}{2}}$. On en déduit que $|F(x) - F(x_0) + (x-x_0)\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t e^{-tx_0}\, dt| \leq \frac{(x-x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} |\sin t| t e^{-\frac{tx_0}{2}}\, dt$, toutes les intégrales ayant manifestement un sens. En divisant par $|x - x_0|$, on en déduit que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t e^{-tx_0}\, dt = -\frac{1}{1+x_0^2}$ (facile). On obtient donc $F(x) = K - \operatorname{arctg} x$, pour $x > 0$. Nous laissons en exercice au lecteur le soin de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, ce qui montrera que $K = \dfrac{\pi}{2}$. Bien entendu, on aurait pu aussi utiliser le théorème de convergence dominée pour démontrer la dérivabilité de F sur $]0, +\infty[$ (ou plutôt sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$).