Sommation et intégration formelles

par Denis MONASSE

Les logiciels de calcul formel, que ce soient Derive, Mathematica et Maple, font leur apparition dans l'enseignement des mathématiques en France. Certains d'entre eux (et très bientôt ce sera le cas de tous) tournent sur des ordinateurs de poche dont les élèves peuvent disposer aux examens et concours et il ne fait pas de doute que leur usage va se répandre très rapidement, dès que la baisse des prix prévisible des matériels les aura rendus plus accessibles et que nos étudiants en auront découvert toute la puissance.

En dehors des problèmes purement pédagogiques que cela peut poser, il convient pour un scientifique d'essayer de comprendre le fonctionnement de ces outils et d'en connaître le domaine de validité. Les algorithmes de calcul formel ont connu un développement parallèle à celui des matériels capables de les faire fonctionner et, bien que ce soit encore un domaine de recherche en pleine activité, les plus fondamentaux d'entre eux ont vu le jour entre 1960 et 1980, que ce soient les premiers essais de manipulation d'expressions algébriques et de dérivation ou des algorithmes complets d'intégration (algorithme de Risch), de factorisation de polynômes à coefficients dans un corps fini et par suite à coefficients rationnels (Berlekamp) et de sommation de séries (Gosper). Nous commencerons par décrire ce dernier algorithme, avec une démonstration complète de sa validité et des exemples d'applications. Nous essayerons ensuite de fournir des idées sur les techniques d'intégration formelle en donnant un algorithme de calcul de primitives de fractions rationnelles.

L'algorithme de Gosper

Donnons nous une série $\sum_n a_n$ à terme général réel ou complexe connu. On appelle $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la somme partielle d'indice n de la série. L'algorithme de Gosper permet de détecter le fait que S_n admet une expression en fonction de n telle que le rapport

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

soit une fraction rationnelle en n (ce qui couvre beaucoup de cas d'expressions de S_n en termes de fractions rationnelles, de factorielles et d'exponentielles) et d'en déterminer explicitement une telle expression. C'est donc un algorithme complet dans le sens où soit il aboutit à une expression explicite de S_n en fonction de n, soit il échoue, et on a dans ce cas une preuve qu'il n'existe pas d'expression répondant à notre condition de rationalité du rapport

$$\frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

En réalité, le fait de démarrer à $k = 0$ n'a aucune importance en ce qui concerne le calcul des sommes partielles de la série (mais il peut en avoir sur la rationalité du rapport S_n/S_{n-1} comme le montre l'exemple d'une série géométrique) et nous allons remplacer notre problème initial par celui plus général de rechercher une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions

(i) $a_n = S_n - S_{n-1}$

(ii) S_n/S_{n-1} est une fraction rationnelle en n.

On aura alors

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = S_n - S_{n_0-1}.$$

Proposition 1. *Le rapport S_n/S_{n-1} est une fraction rationnelle en n si et seulement si il existe des fractions rationnelles $R(X)$ et $\alpha(X)$ (à coefficients rationnels, réels ou complexes suivant le cas), telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = R(n) \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \alpha(n)a_n \tag{2}$$

Demonstration: la condition est bien évidemment suffisante puisque si (1) et (2) sont vérifiées, on a

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}\,\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\alpha(n)}{\alpha(n-1)}R(n).$$

La réciproque provient des formules évidentes

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1} - S_{n-2}} = \frac{\frac{S_n}{S_{n-1}} - 1}{1 - \frac{S_{n-2}}{S_{n-1}}} = \frac{\sigma(n) - 1}{1 - \frac{1}{\sigma(n-1)}}$$

(en posant $S_n/S_{n-1} = \sigma(n)$) et

$$a_n = S_n - S_{n-1} = S_n(1 - \frac{1}{\sigma(n)})$$

soit

$$S_n = \frac{\sigma(n)}{\sigma(n) - 1} a_n.$$

La fraction rationnelle R étant supposée connue, l'algorithme de Gosper va permettre soit de calculer la fraction rationnelle $\alpha(X)$ quand celle-ci existe, soit d'assurer qu'elle n' existe pas et que le rapport S_n/S_{n-1} n'est donc pas une fraction rationnelle en n.

Proposition 2. *Il existe des polynômes $p(X)$, $q(X)$ et $r(X)$ vérifiant les deux conditions*

$$R(X) = \frac{p(X)q(X)}{p(X-1)r(X)} \tag{3}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad q(X) \wedge r(X+k) = 1 \tag{4}.$$

Demonstration: posons $p_0(X) = 1$ et $R(X) = \frac{q_0(X)}{r_0(X)}$ avec $q_0(X) \wedge r_0(X) = 1$. On définit ensuite par récurrence des polynômes p_j, q_j et r_j tels que

$$R(X) = \frac{p_j(X)q_j(X)}{p_j(X-1)r_j(X)}$$

de la manière suivante:

si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q_j(X)$ et $r_j(X+k)$ sont premiers entre eux, on prend $p = p_j$, $q = q_j$ et $r = r_j$; sinon, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $q_j(X)$ et $r_j(X+k)$ ne sont pas premiers entre eux et appelons $g(X)$ leur PGCD; on pose

$$q_{j+1}(X) = \frac{q_j(X)}{g(X)}, r_{j+1}(X) = \frac{r_j(X)}{g(X-k)} \text{ et } p_{j+1}(X) = p_j(X)g(X)g(X-1)\dots g(X-k+1)$$

si bien que l'on a encore

$$R(X) = \frac{p_{j+1}(X)q_{j+1}(X)}{p_{j+1}(X-1)r_{j+1}(X)}.$$

Comme le degré de q_{j+1} est strictement inférieur à celui de q_j, la construction ne peut se poursuivre indéfiniment et on finit par se trouver dans le premier cas, ce qui permet de déterminer p, q et r.

Remarque: la construction précedente présente une difficulté du point de vue algorithmique, à savoir le test de l'existence d'un $k \in \mathbb{N}$ tel que $q_j(X)$ et $r_j(X+k)$ ne soient pas premiers entre eux. On peut envisager d'effectuer ce test de deux manières différentes. La première est d'introduire le résultant par rapport à la variable X des deux polynômes $q_j(X)$ et $r_j(X+Y)$ et de rechercher si ce polynôme en Y peut avoir des racines dans $\mathbb{N}$ ce qui ne présente pas de difficulté. La deuxième est, dans le cas où tous les polynômes sont à coefficients rationnels, d'effectuer la décomposition en polynômes irréductibles normalisés des polynômes q_j et r_j (cela est possible de manière algorithmique):

$$q_j(X) = \lambda Q_1(X)\dots Q_m(X), \quad r_j(X) = \mu R_1(X)\dots R_n(X).$$

Il suffit alors de tester si on peut avoir pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $Q_s(X) = R_t(X+k)$ pour un $s \in [1, m]$ et un $t \in [1, n]$. Cela nécessite que les degrés de Q_s et R_t soient les mêmes et la valeur de k s'obtient sans difficulté en considérant le terme sous dominant de $Q_s(X) - R_t(X+k)$.

Proposition 3. *Si la fraction rationnelle $\alpha(X)$ existe, alors elle est de la forme*

$$\alpha(X) = \frac{q(X+1)}{p(X)} f(X)$$

pour un certain polynôme $f(X)$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$p(X) = q(X+1)f(X) - f(X-1)r(X) \tag{5}.$$

Demonstration: on écrit

$$1 = \frac{S_n - S_{n-1}}{a_n} = \frac{\alpha(n)a_n - \alpha(n-1)a_{n-1}}{a_n} = \alpha(n) - \frac{\alpha(n-1)}{R(n)} = \alpha(n) - \frac{\alpha(n-1)p(n-1)r(n)}{p(n)q(n)}$$

et donc

$$p(n)q(n) = \alpha(n)p(n)q(n) - \alpha(n-1)p(n-1)r(n).$$

Comme cette identité est vérifiée par une infinité de n, on a donc

$$p(X)q(X) = \alpha(X)p(X)q(X) - \alpha(X-1)p(X-1)r(X)$$

soit

$$p(X)q(X) = \beta(X)q(X) - \beta(X-1)r(X) \tag{6}$$

en posant $\beta(X) = \alpha(X)p(X)$.

Supposons que β n'est pas un polynôme et soit z un pôle complexe de β. L'identité (6), compte tenu du fait que $p(X)q(X)$ est un polynôme, nous montre que soit z est un pôle de $\beta(X-1)$ (ce qui signifie que $z-1$ est un pôle de β), soit $q(z) = 0$. De même, en écrivant l'identité (6) sous la forme

$$p(X+1)q(X+1) = \beta(X+1)q(X+1) - \beta(X)r(X+1)$$

on voit que soit z est un pôle de $\beta(X+1)$ (et donc $z+1$ est un pôle de β), soit $r(z+1) = 0$. Comme β n'a qu'un nombre fini de pôles complexes, choisissons un pôle z de β tel que $z-1$ ne soit pas un pôle de β. On a donc $q(z) = 0$ et comme par hypothèse $q(X)$ est premier avec tous les $r(X+k)$, on a $\forall k \in \mathbb{N} \quad r(z+k) \neq 0$. On en déduit que $z+1$ est pôle de β, puis par récurrence que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $z+k$ est un pôle de β, ce qui est absurde. Donc β est un polynôme.

On peut alors réécrire (6) sous la forme

$$(p(X+1) - \beta(X+1))q(X+1) = \beta(X)r(X+1)$$

et comme $\beta(X+1)$ et $r(X+1)$ sont premiers entre eux, $q(X+1)$ divise $\beta(X)$, soit $\beta(X) = q(X+1)f(X)$ pour un certain polynôme $f(X)$. On reporte alors dans (6) et on obtient en simplifiant par $q(X)$,

$$p(X) = q(X+1)f(X) - f(X-1)r(X).$$

La proposition précédente ramène donc le problème de l'existence et du calcul de $\alpha(X)$ à celui de l'existence et du calcul d'un polynôme $f(X)$ vérifiant (5). Or il est clair que, si l'on connaît une majoration du degré de $f(X)$, l'identité (5) conduit à un système d'équations linéaires en les coefficients de $f(X)$, système dont l'existence et le calcul des solutions se résolvent sans difficulté. Il suffit donc maintenant de trouver une majoration de ce degré. Pour cela nous allons transformer l'identité (5) en l'identité

$$p(X) = (q(X+1) - r(X))\frac{f(X) + f(X-1)}{2} + (q(X+1) + r(X))\frac{f(X) - f(X-1)}{2} \tag{8}.$$

Posons donc $s_+(X) = q(X+1) + r(X)$ et $s_-(X) = q(X+1) - r(X)$.

Proposition 4. *Si* $\deg s_-(X) \neq \deg s_+(X) - 1$ *alors*

$$\deg f(X) = \deg p(X) - \max(\deg s_-(X), \deg s_+(X) - 1).$$

Si $\deg s_-(X) = \deg s_+(X) - 1 = \ell$ *et si on a* $s_-(X) = u_\ell X^\ell + \ldots$, $s_+(X) = v_{\ell+1}X^{\ell+1} + \ldots$, $n_0 = -2\frac{u_\ell}{v_{\ell+1}}$, *alors*

$$\deg f \leq \begin{cases} \deg p - \ell & \text{si } n_0 \notin \mathbb{N} \\ \max(\deg p - \ell, n_0) & \text{si } n_0 \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Demonstration: appelons $d = \deg f$.Alors $\deg \frac{f(X)+f(X-1)}{2} = d$ et $\deg \frac{f(X)-f(X-1)}{2} = d - 1$. On a donc

$$\deg((q(X+1) - r(X))\frac{f(X) + f(X-1)}{2}) = d + \deg s_-$$

et

$$\deg((q(X+1) + r(X))\frac{f(X) - f(X-1)}{2}) = d + \deg s_+ - 1.$$

Si $\deg s_-(X) \neq \deg s_+(X) - 1$ alors on a

$$\deg(s_-(X)\frac{f(X) + f(X-1)}{2} + s_+(X)\frac{f(X) - f(X-1)}{2}) = d + \max(\deg s_-(X), \deg s_+(X) - 1)$$

ce qui montre le résultat dans le premier cas. Dans le deuxième cas, on remarque que si $f(X) = w_d X^d + \ldots$, alors

$$s_-(X)\frac{f(X) + f(X-1)}{2} + s_+(X)\frac{f(X) - f(X-1)}{2} = (u_\ell + \frac{1}{2}v_{\ell+1}d)w_d X^{d+\ell} + \ldots.$$

On a donc soit $d = n_0$, soit $d + \ell = \deg p(X)$ ce qui démontre le deuxième cas.

La suite des opérations est donc claire. Si les majorations obtenues pour $\deg f$ conduisent à une impossibilité ($\deg f < 0$), c'est que notre problème n'a pas de solution. Sinon, il reste à écrire $f(x) = w_d X^d + \cdots + w_0$, où d majore le degré de $f(X)$ et à reporter dans (5). Si le système linéaires aux inconnues $w_0, \ldots, w_d$ n'a pas de solution, c'est que notre problème n'en a pas non plus. Sinon, on explicite une solution, d'où $f(X)$, puis $\alpha(X)$ et donc le calcul de S_n.

Exemples

Prenons tout d'abord $a_n = n^2 t^n$, si bien que

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^2}t = R(n).$$

La méthode ci dessus conduit à écrire

$$R(X) = \frac{p(X)q(X)}{p(X-1)r(X)}$$

avec $p(X) = (X-1)^2$, $q(X) = t$ et $r(X) = 1$ (la condition $q(X) \wedge r(X+k) = 1$ étant bien évidemment vérifiée). On est donc amené à rechercher un polynôme $f(X)$ vérifiant $p(X) = f(X)q(X+1) - f(X-1)r(X)$, soit ici $(X-1)^2 = tf(X) - f(X-1)$. Si $t \neq 1$, $f(X)$ est nécessairement de degré 2, et par identification on obtient

$$f(X) = \frac{1}{(t-1)}X^2 - \frac{2\,t}{(t-1)^2}X + \frac{t\,(t+1)}{(t-1)^3}.$$

On a alors

$$S_n = \frac{q(n+1)f(n)}{p(n)}a_n = t^{n+1}\left(\frac{1}{(t-1)}n^2 - \frac{2\,t}{(t-1)^2}n + \frac{t\,(t+1)}{(t-1)^3}\right).$$

Il faudrait évidemment faire un nouveau calcul de $f(X)$ pour $t = 1$ en cherchant cette fois un polynôme de degré 3.

Ce premier exemple montre mal les possibilités offertes par l'algorithme de Gosper, puisqu'on aurait pu aboutir au même résultat plus simplement. Prenons-en un plus complexe avec

$$a_n = \frac{n^3 - 2n^2 - 1}{n^4 + n^2 + 1}(n-1)!.$$

La même méthode conduit à $p(X) = X^3 - 2X^2 - 1$, $q(X) = X^3 - 4X^2 + 6X - 3$ et $r(X) = X^2 + X + 1$. On est alors conduit à chercher un polynôme $f(X)$ de degré 0, et à

$$S_n = \frac{n!}{n^2 + n + 1}.$$

Introduction aux méthodes d'intégration formelle

Nous allons essayer de donner quelques idées sur les techniques utilisées pour l'intégration formelle, en particulier dans l'algorithme de Risch. Pour cela nous commencerons par l'intégration des fractions rationnelles avec des idées datant de Liouville et d'Hermite. La technique enseignée aux élèves de nos classes (décomposition en éléments simples sur le corps des complexes et intégration terme à terme) se heurte en effet à une difficulté algorithmique insurmontable, celle de la factorisation sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$ du dénominateur de la fraction rationnelle. Or les problèmes ne sont en général pas équivalents, même s'il est certain que dans certains cas on ne puisse pas espérer trouver une primitive d'une fraction rationnelle sans passer par une factorisation complête du dénominateur. Il s'agit ici de montrer que l'on peut souvent se contenter de factorisations partielles de ce dénominateur.

Soit $R(X) = P(X)/Q(X)$ une fraction rationnelle sous forme irréductible.La méthode habituelle de division euclidienne permet de supposer que $\deg P(X) < \deg Q(X)$. La première chose à faire, c'est de délimiter les parties rationnelles et logarithmiques. Pour cela on introduira $Q_1(X) = Q(X) \wedge Q'(X)$ (que l'on peut calculer par l'algorithme d'Euclide) et $Q_2(X)$ le quotient de $Q(X)$ par $Q_1(X)$. Si la factorisation complexe de $Q(X)$ est $Q(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{m_i}$, alors on a

$$Q_1(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{m_i - 1} \text{ et } Q_2(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i).$$

Le théorème de décomposition en éléments simples nous montre alors (en séparant les éléments simples complexes correspondant à un exposant égal à 1 de ceux correspondant à un exposant supérieur ou égal à 2) la proposition suivante

Proposition 1. *$R(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$R(X) = \left(\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}\right)' + \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes vérifiant $\deg P_1 < \deg Q_1$ et $\deg P_2 < \deg Q_2$.

Les coefficients de ces polynômes P_1 et P_2 peuvent être déterminés par identification en les choisissant comme inconnus et en résolvant un système d'équations linéaires pour les calculer.

Notre problème est donc ramené à celui de calculer une primitive (purement logarithmique) de la fraction rationnelle $P_2(X)/Q_2(X)$, le polynôme Q_2 ayant la propriété d'être séparable (c'est à dire sans racine multiple sur $\mathbb{C}$). Bien entendu, la factorisation complête de Q_2 n'est ni plus facile, ni plus difficile que celle de Q, et c'est d'elle que nous allons essayer de nous passer. Nous allons donc supposer désormais que Q est un polynôme séparable. En écrivant la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et en regroupant ensemble les éléments simples correspondant au même coefficient (c'est à dire au même résidu), on obtient la proposition suivante

Proposition 2. *La fraction rationnelle $R(X)$ (qui n'admet que des pôles simples) s'écrit de manière unique sous la forme*

$$R(X) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{T_i'(X)}{T_i(X)}$$

où les α_i sont des nombres complexes distincts et les T_i des polynômes deux à deux premiers entre eux.

Pour calculer une primitive de $R(X)$, il suffit bien entendu de connaître les scalaires α_i et les polynômes $T_i(X)$ correspondant, qui fournissent une décomposition partielle de Q sous la forme

$$Q(X) = T_1(X) \dots T_p(X).$$

C' est l'objet de la proposition suivante:

Proposition 3. *Soit α un nombre complexe. Alors α est l'un des α_i si et seulement si les polynômes $P(X) - \alpha Q'(X)$ et $Q(X)$ ne sont pas premiers entre eux. Dans ce cas, le polynôme $T_i(X)$ correspondant est le PGCD de $P(X) - \alpha Q'(X)$ et de $Q(X)$.*

Démonstration: écrivons

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \alpha \frac{T'(X)}{T(X)} + \frac{U(X)}{V(X)}$$

où $T(X)$ et $V(X)$ sont premiers entre eux. On a $Q(X) = T(X)V(X)$ et l'identité s'écrit

$$P(X) = \alpha T'(X)V(X) + U(X)T(X). \tag{1}$$

Mais on a $Q'(X) = T'(X)V(X) + V'(X)T(X)$ et (1) devient

$$P(X) - \alpha Q'(X) = (U(X) - \alpha V'(X))T(X).$$

On en déduit que $T(X)$ divise à la fois $Q(X)$ et $P(X) - \alpha Q'(X)$ qui ne sont donc pas premiers entre eux.

Inversement, supposons que $Q(X)$ et $P(X) - \alpha Q'(X)$ ne sont pas premiers entre eux, et appelons $T(X)$ leur PGCD. Ecrivons $Q(X) = T(X)V(X)$. Comme $Q(X)$ est séparable, T et V sont premiers entre eux, et on peut donc écrire

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{W(X)}{T(X)} + \frac{U(X)}{V(X)}$$

avec $\deg W < \deg T$ et $\deg U < \deg V$.

En réduisant au même dénominateur, on obtient $P(X) = W(X)V(X) + U(X)T(X)$. Comme $Q'(X) = T'(X)V(X) + V'(X)T(X)$ on obtient

$$P(X) - \alpha Q'(X) = (W(X) - \alpha T'(X))V(X) + (U(X) - \alpha V'(X))T(X).$$

Comme $T(X)$ divise $P(X) - \alpha Q'(X)$, il doit donc diviser $(W(X) - \alpha T'(X))V(X)$, et comme il est premier avec $V(X)$, il divise $W(X) - \alpha T'(X)$. Comme ce polynôme est de degré strictement inférieur à celui de T, on a $W(X) - \alpha T'(X) = 0$, soit $W(X) = \alpha T'(X)$ et donc la décomposition

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \alpha \frac{T'(X)}{T(X)} + \frac{U(X)}{V(X)}.$$

L'unicité de la décomposition achève alors la démonstration en ce qui concerne la valeur de T.

La démarche à suivre devient alors claire. On note $H(\alpha)$ le résultant de $P(X) - \alpha Q'(X)$ et de $Q(X)$. Il s'agit d'un polynôme en α de degré égal à celui de Q (une fois éliminée la valeur de α correspondant à l'annulation du terme de plus haut degré de $P(X) - \alpha Q'(X)$ si $\deg P = \deg Q - 1$). On détermine les racines α_i de H et pour chacune d'entre elles le PGCD $T_i(X)$ de $P(X) - \alpha_i Q'(X)$ et de $Q(X)$. Alors une primitive de $R(x)$ est

$$\sum_i \alpha_i \log |T_i(x)|.$$

Bien entendu, la question à se poser est de savoir ce que l'on gagne par cette méthode, puisqu'on a remplacé le problème de la factorisation du polynôme $Q(X)$ par celui de la recherche des racines du polynôme H, qui est de même degré. Dans le cas général, où H n'a que des racines simples, on ne gagne rien. Mais dans le cas où H a des racines multiples, la recherche des racines de H est équivalente à celle des racines de

$$H_1(X) = \frac{H(X)}{H(X) \wedge H'(X)}$$

qui est de degré inférieur. En fait, on peut montrer que le corps de décomposition de H_1 est le plus petit corps dans lequel on peut exprimer une primitive de $R(X)$. L'algorithme est donc complet dans le sens où, soit on sait factoriser complêtement le polynôme H_1 et alors on sait expliciter une primitive de la fraction rationnelle $R(X)$, soit on ne sait pas factoriser complêtement $H_1(X)$ et alors il n'existe pas de primitive explicitable de $R(X)$. Tout dépend du sens que l'on donne aux mots "on sait" et "explicitable" et en particulier des nouveaux symboles que l'on se permet d'introduire à cette occasion: la plupart des logiciels de calcul formel permettent de définir des extensions de corps à l'aide d'un élément générique du type RootOf(p(X)) qui désigne n'importe quelle racine du polynôme irréductible $p(X)$ et dans ce cas, il suffit de construire le corps de décomposition du polynôme à l'aide d'une tour de telles extensions monogènes, définies comme corps de rupture de polynômes irréductibles.

On peut donc considérer que l'on a construit un algorithme permettant de déterminer si une fraction rationnelle a une primitive "explicitable", et si oui de la calculer.

L'algorithme de Risch utilise le même type d'idées, avec comme ingrédients principaux des décompositions de fractions rationnelles, des calculs de PGCD ou de résultants de polynômes et des identifications conduisant à des systèmes d'équations linéaires. Il permet de rechercher des primitives de fonctions $f(x)$ telles qu'il existe une tour

$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

de corps différentiels (c'est à dire stables par dérivations) tels que:

(i) $K_0 = K(x)$ et $f \in K_n$ (où $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

(ii) $K_{i+1} = K_i(f_i)$ où f_i est soit le logarithme, soit l'exponentielle d'un élément de K_i.

C'est un algorithme récursif qui redescend le calcul de primitives tout au long de la tour de corps différentiels à l'aide de décompositions en éléments simples et d'identifications. Nous essayerons d'y revenir au cours d'un prochain article.

Les méthodes utilisées pour les fonctions algébriques sont nettement plus délicates du point de vue du bagage mathématique nécessaire pour les comprendre. Elles font un gros emploi de surfaces de Riemann et de diviseurs sur ces surfaces pour déterminer les parties logarithmiques de la primitive, ce qui dépasserait le cadre de ces articles.